



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

1) ОСНОВНИ УРАВНЕНИЯ

Основни уравнения в механиката на флуидите с добавяне (изземване) на маса

При химически реакции, свързани с превръщане на едно вещество в друго, при изменение на фазовото състояние (изпарение на движеща се течност с възникване на паровъздушни мехурчета или при обратния случай – кондензация, при която се появяват течни капки - топенето на леда, изстиване на течен метал и други подобни процеси) съществува движение на непрекъсната среда (на флуидите), при което непрекъснато по течението се добавя (възниква) или изземва (изчезва) маса от даден вид. В тези случаи е прието да се прилагат методите на механиката на променливата маса. Съгласно Л. Г. Лойцянский [1] теоретичният модел на подобно флуидно течение се определя като “предварително зададено, определено от химическата или физическата кинетика на протичащите в движещата се среда процеси, непрекъснато разпределение на източници (или падини) на маса с интензивност, характеризираща се с отнесено към единица обем и време изменение на масата в дадена точка”. Измерението на тази величина е $[\text{kg}/\text{m}^3\text{s}]$, т.е. плътност за единица време. За отличие от производната на ρ по времето - $d\rho/dt$, в [1] се предлага означението J , което е възприето и в тази книга.

Уравнение за непрекъснатост. Разглежда се елементарната маса $\Delta m = \rho \Delta W$, където ΔW е елементарен обем от флуида, а ρ - плътността. По отношение на Δm се прилага известният закон за запазване на масата:

$$1. \frac{d}{dt}(\Delta m) = \frac{d}{dt}(\rho \Delta W) = 0$$

Записаният израз се диференцира почленно, при което се получава

$$\frac{d\rho}{dt}(\Delta W) + \rho \cdot \frac{d}{dt}(\Delta W) = 0$$

Както е известно от наученото дотук по механика на флуидите, производението $(d/dt)(\Delta W) \cdot \Delta W^{-1} = \text{div} \vec{V}$, заместено в горния израз, води до

$$\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \vec{V} \right) \Delta W = 0,$$

където $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, u , v , w са компоненти на скоростта $\vec{V}$.

$$2. \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \vec{V} = 0$$

Ако се приеме, че плътността е функция на координатите и времето $\rho = \rho(x, y, z, t)$, то съгласно [2] за производната ѝ по време се получава

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z},$$

което, заместено в (2), дава уравнението за непрекъснатост:

$$3. \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

При установено течение, за което $\partial\rho/\partial t = 0$, видът на уравнението се опростява:

$$4. \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Уравнения (3–4) в Декартова координатна система имат вида:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0$$

При несвиваеми флуиди ($\rho = \text{const}$) уравнението има вида

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

При случаите на добавяне или загуба на маса и използване динамиката на променлива маса съгласно [1] е в сила отношението

$$5. \frac{d}{dt}(\Delta m) = \frac{d}{dt}(\rho \Delta W) = J \cdot \Delta W,$$

от което следва вида на уравнението за непрекъснатост с променлива маса:

$$6. \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \vec{V} = J$$

$$7. \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = J$$

Уравнение на динамиката на флуидните течения в “напрежения”. При извода на уравнението за движение (динамиката) на флуидите се изхожда от теоремата за изменение на главния вектор на количеството на движение. Съгласно тази теорема главният вектор на количество на движение на системата от материални точки $\vec{K}$ е равен на интеграла от произведението на елементарната маса Δm и вектора на скоростта $\vec{V}$:

$$8. \vec{K} = \int_m \vec{V} \cdot \Delta m = \int_w \rho \cdot \vec{V} \cdot dW$$

Производната на главния вектор на количество на движение по времето е равна на главните вектори на външните масови и повърхностни сили, действащи върху единица обем:

$$9. \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_w \rho \cdot \vec{V} \cdot \Delta W = \int_w \rho \cdot \vec{F} \cdot \Delta W + \int_s \vec{P}_n \cdot ds$$

Производната на главния вектор на количество на движение по отношение на времето се определя, както следва:

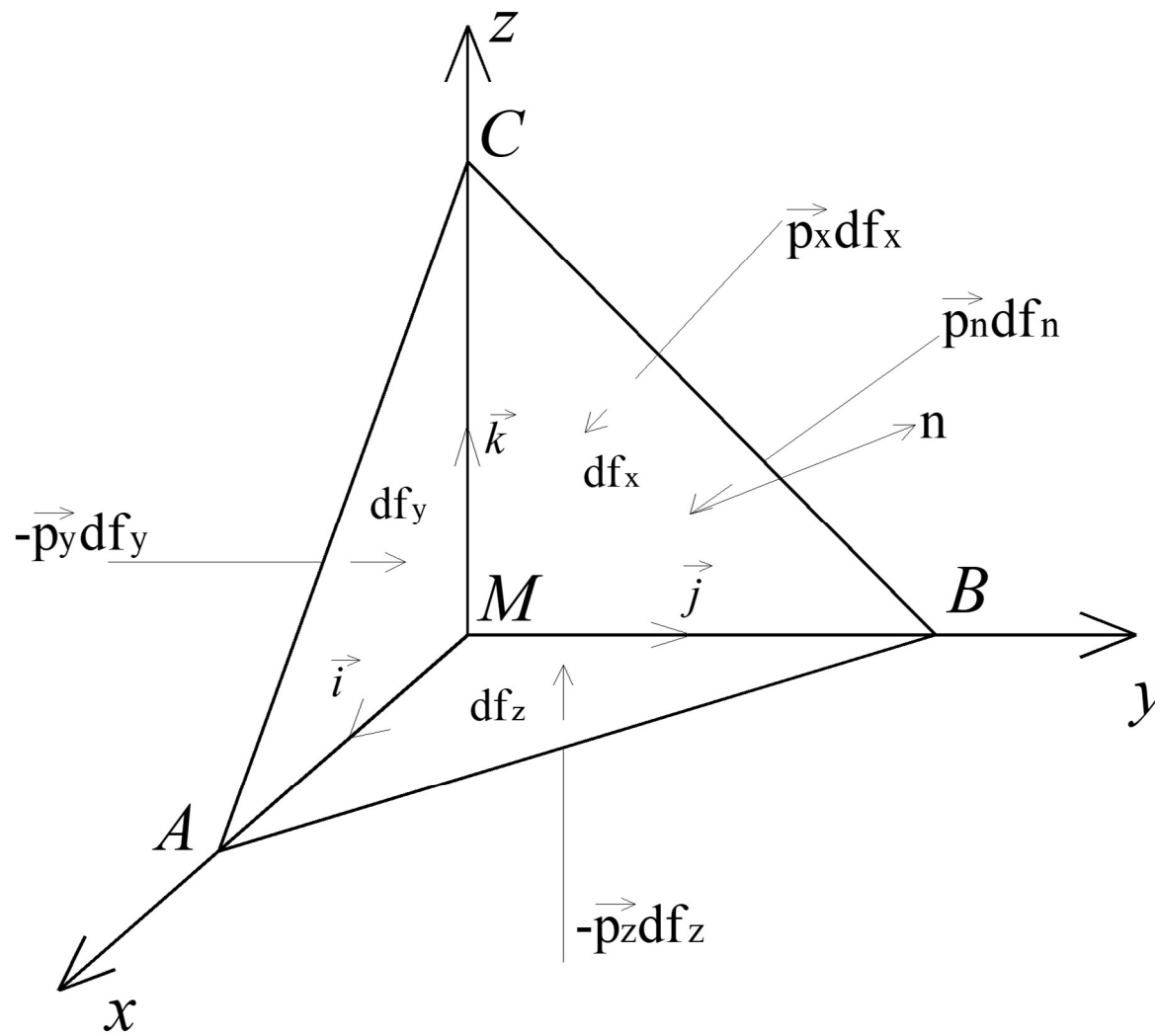
$$10. \frac{d}{dt} \int_w \rho \cdot \vec{V} \cdot \Delta W = \int_w \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \Delta W + \int_w \vec{V} \frac{d}{dt} (\rho \cdot \Delta W) = \int_w \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \Delta W$$

Вторият интеграл в (10) е равен на нула съгласно закона за запазване на масата.

Интегралът по повърхността s в (9) се преобразува в обемен интеграл съгласно теоремата на Гаус-Остроградски:

$$11. \frac{d}{dt} \int_s \vec{p}_n ds = \int_w \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \Delta W ,$$

където $\vec{p}_n, \vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ са вектори на вътрешни напрежения, действащи по нормалата, и по трите координатни оси на дадена произволно ориентирана в пространството площадка, свързана с определена точка от пространството на флуидното течение (т. М съгласно фиг. 1- на следващия слайд).



фиг. 1

След заместване на (10) и (11) в (9) се получава

$$12. \int_w \left(\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} \right) \Delta W = 0$$

или като се интегрира по произволен обем W:

$$13. \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z}$$

Полученото уравнение е известно в механиката на флуидите като *уравнение на динамиката (за движение) в напрежения*.

В декартова координатна система уравн. (13) приема вида:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho \cdot F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}$$

$$14. \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \cdot F_y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \cdot F_z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z},$$

където $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{yx}, p_{xz}, p_{zx}, p_{yz}, p_{zy}$ са съставлящите на тензора на вътрешните напрежения P :

$$P = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix}$$

Тензорът на вътрешните напрежения P е симетричен, при което са в сила равенствата $p_{xy} = p_{yx}, p_{xz} = p_{zx}, p_{yz} = p_{zy}$. В нашата литература [3, 4, 5, 6] тензорът най-често се представя с нормални напрежения σ и тангенциални напрежения τ , при което съществува следната връзка между означенията: $p_{xx} = \sigma_x, p_{yy} = \sigma_y, p_{zz} = \sigma_z, p_{xy} = \tau_{xy}, p_{yx} = \tau_{yx}, p_{xz} = \tau_{xz}, p_{zx} = \tau_{zx}, p_{yz} = \tau_{yz}, p_{zy} = \tau_{zy}$.

Във векторен вид уравнението за динамиката в напрежения се представя с изрази

$$15. \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} = \rho \cdot \vec{F} + \text{div} P$$

При наличие на източници на маса ($J \neq 0$) в лявата част на уравн. (15) се добавя един нов член $J \cdot \vec{V}$, чрез който се отчита изменението на количеството на движение, дължащо се на допълнителния приток на маса. Уравнението на динамиката в напрежение, разгледано за този случай, има вида

$$16. \rho \frac{d\vec{V}}{dt} + J \cdot \vec{V} = \rho \cdot \vec{F} + \text{div} P$$

$$17. \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} + \text{div} P - J \cdot \vec{V}$$

Теорема за момента на количество на движение. Моментът на количество на движение при отчитане на приток на маса с интензивност J има вида

$$18. \int_w \left[\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + J \cdot \vec{V} - \rho \cdot \vec{F} - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] \Delta W = 0$$

Уравнение за изменение на кинетичната енергия. Закон за запазване на енергията. Теоремата за изменение на кинетичната енергия в елементарен движещ се флуиден обем W , записан в интегрална форма, има вида:

$$19. \frac{d}{dt} \int_w \left(\rho \frac{V^2}{2} \right) dW = \int_w \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dW + \int_s \vec{p}_n \cdot \vec{V} \cdot ds + \int_w N_{in} dW,$$

където N_{in} е отнесена към единица обем мощност на вътрешните сили. Тя може да се разглежда и като плътност на разпределението на мощността на вътрешните сили.

След съответни преобразования, като се използват правилата на тензорното смятане, горното уравнение се преработва в диференциална форма:

$$20. \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} + \text{div} (P \cdot \vec{V}) + N_{in}$$

Умножава се скалярно (15) на $\vec{V}$, при което се получава $\rho \cdot d\vec{V}/dt \cdot \vec{V} \equiv \rho \cdot d/dt(V^2) = \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \text{div} P$, и като се извади почленно от уравн.(20), следва $N_{in} = \vec{V} \cdot \text{div} P - \text{div}(P \cdot \vec{V})$.

След съответни преобразувания за N_{in} се получава

$$21. N_{in} = -P \cdot S$$

Мощността на вътрешните сили е равна на произведението на двата тензора – на вътрешните напрежения P и на деформационните скорости S - взето с обратен знак.

Флуидните течения са съпроводени с преобразуване на енергията от един в друг вид, например от механична в топлинна и обратно. Пресмятането на тези течения се прави чрез уравнението за енергийния баланс. Изводът му следва от общия термодинамичен закон за запазване на енергията. Съгласно [1] този закон се изразява по следния начин: “Производната по време на пълната енергия на даден движещ се флуиден обем е равна на сумата от мощността на приложените към разглеждания обем и повърхността му външни масови и повърхностни сили и отнесената към единица време внесена отвън енергия”. В интегрална форма законът се представя във вида

$$22. \frac{d}{dt} \int_W \rho \cdot \left(U + \frac{V^2}{2} \right) dW = \int_W \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} dW + \int_S \vec{p}_n \cdot \vec{V} \cdot ds + \int_W \rho \cdot q \cdot dW,$$

където U е отнесената към единица маса вътрешна енергия на флуидната среда. Тя включва в себе си всички възможни видове енергия от вътрешните движения в материята – напр. топлинна енергия, която е пропорционална

на кинетичната енергия на вътрешното топлинно движение на молекулите; q – отнесена към единица маса енергия, въведена отвън.

В лявата страна на уравн.(22) заграденият в скоби израз, представляващ сумата от вътрешната и кинетичната енергия, се нарича пълна енергия на флуида. Кинетичната енергия в случая се разглежда като външна [1].

След съответна преработка и интегриране по произволен обем W се получава уравнението за баланса на енергията в диференциална форма:

$$23. \rho \cdot \frac{d}{dt} \left(U + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} + \text{div} (P \cdot \vec{V}) + \rho \cdot q$$

Ако от получения израз се извади уравнението за изменение на кинетичната енергия (20), се получава следната опростена форма за баланса на енергията:

$$24. \rho \cdot \frac{dU}{dt} = \rho \cdot q - N_{in}$$

Особеното в това уравнение е, че не съдържа в себе си обемните сили и скоростта. То дава зависимостта на отнесената към единица маса промяна по времето на вътрешната енергия на флуида от внесена отвън енергия и мощността на вътрешните сили.

В случаите, когато съществуват източници на маса, разположени непрекъснато по течението с интензивност J , в уравненията за енергията възниква допълнителен член. Уравненията за изменение на кинетичната енергия и за баланса на енергия (20), (23) и (24) се записват във вида:

$$25. \rho \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} + \operatorname{div} (P \cdot \vec{V}) + N_{in} - \frac{J \cdot V^2}{2}$$

$$26. \rho \cdot \frac{d}{dt} \left(U + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} + \operatorname{div} (P \cdot \vec{V}) + p \cdot q + J \cdot \left(U + \frac{V^2}{2} \right)$$

$$27. \rho \cdot \frac{dU}{dt} = p \cdot q - N_{in} - J \cdot U$$

За мощността на вътрешните сили се получава

$$28. N_{in} = -P \cdot S + \frac{J \cdot V^2}{2}$$

Особености при подвижни източници на маса. Уравненията (17), (18), (25÷28), в които се отчита наличието на допълнителен приток на маса към течението, са изведени при условие, че източниците на маса са неподвижни. Ако обаче тези източници се движат с някаква скорост $\vec{V}_i$, трябва да се използва релативната скорост – $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_i$. Изменението на количеството на движение при подобен приток на маса води до следния вид на уравн.(17):

$$29. \rho \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} + \text{div} P - J \cdot (\vec{V} - \vec{V}_i),$$

съответно за момента на количество на движение:

$$30. \int_w \left[\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + J \cdot (\vec{V} - \vec{V}_i) - \rho \cdot \vec{F} - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] \cdot \Delta W = 0$$

В уравнението за изменение на кинетичната енергия допълнителният член се изразява с $J \cdot (V^2/2 - V_i^2/2)$, от което следва

$$31. \rho \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} + \text{div} (P \cdot \vec{V}) + N_{in} - J \cdot \left(\frac{V^2}{2} - \frac{V_i^2}{2} \right)$$

Уравн. (26) приема вида

$$32. \rho \cdot \frac{d}{dt} \left(U + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{V} + \operatorname{div} (P \cdot \vec{V}) + p \cdot q + J \cdot (E - E_i),$$

където $E = U + V^2/2$ е пълната енергия на течението, а $E_i = U_i + V_i^2/2$ - внесената допълнително пълна енергия с притока на маса.

Уравнение (27) при движещи се източници на маса има вида

$$33. \rho \cdot \frac{dU}{dt} = p \cdot q - N_{in} - J \cdot (U - U_i),$$

а за мощността на вътрешните сили се получава

$$34. N_{in} = -P \cdot S + \frac{J \cdot V^2}{2} - \frac{J \cdot V_i^2}{2}$$

Голяма част от теченията, използвани в топлинните и енергийните съоръжения, при процесите на топло- и масообмен в апаратите на химическата, хранително-вкусовата промишленост и др., особено при движение на нееднородни среди, свързано с физикохимически превръщания, възниква или изчезва някакъв вид маса. Това прави необходимо разглеждането на вече изучените основни уравнения от една малко по-различна гледна точка, в едно по-голямо приближение до действителните течения в промишлените и топлинните обекти.