



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

6) ВТОРИ ВИД УРАВНЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕ НА ТУРБУЛЕНТЕН ФЛУИД

Втори вид уравнения за движение на турбулентен флуид

Уравненията на Рейнолдс за движение на турбулентно течение се правят на основата на хипотезата за равенство на моментната скорост на сбора от осреднената по време и пулсационната и съставлява според (3.1). Получава се един модел на турбулентно течение, при който се налага следващо моделиране на турбулентните напрежения.

Съвременните програмни продукти (Ansys, Fluent) [14] са изградени върху описания по-долу подход. Основен недостатък при описанието им е, че използват неправилно термина „рейнолдсови уравнения“, което заблуждава читателя.

В този раздел се прави изводът на уравненията в упоменатия програмен продукт в точен вид. Показана е възможността за определяне на тримерния спектър на турбулентните напрежения, а оттам и цялостната картина на течението в тримерна постановка.

Диференциални уравнения за турбулентно течение, изведени на основата на уравнението на динамиката на флуидите в напрежения [1,6].

При извода на уравненията за движение на турбулентен флуид се изхожда от уравненията на динамиката на флуиди в напрежения, като при тях се прилага хипотезата на Бусинекс относно ефективния вискозитет.

Уравненията на динамиката на флуидите в напрежения в скаларен вид са следните:

$$3.55 \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$3.56 \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$3.57 \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z},$$

където $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ са нормалните напрежения, а τ_{ij} - тангенциалните.

Съгласно обобщения закон на Нютон - $P = aS + b$, където P и S са тензорите на вътрешни напрежения и на деформационните скорости, $a = 2\mu$ и b са тензорни константи. Тогава за тангенциалните напрежения се получава:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu_{ef} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$3.58 \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu_{ef} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu_{ef} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

За нормалните напрежения при несвиваем флуид следва:

$$\sigma_x = -p + 2\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$3.59 \quad \sigma_y = -p + 2\mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu_{ef} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Съгласно хипотезата на Бусинекс сумарното тангенциално напрежение може да се определи като сума от вискозните и тангенциалните напрежения. На тази база се приема, че

$$3.60 \quad \tau_{eff} = \tau + \tau_T$$

От където за ефективния вискозитет μ_{eff} се приема израза

$$3.61 \quad \mu_{eff} = \mu + \mu_T$$

Относно (3.61) е необходимо да се подчертае, че за разлика от динамичния коефициент на вискозитета μ , μ_T не е константа и не е свойство на флуида, а качеството на течението, зависещо от степента му на турбулентност. Приетият израз позволява да се направи изводът на уравненията за движение на турбулентния флуид.

Заместват се (3.58, 3.59, 3.61) в уравн. 3.55-3.57, от което следва:

$$3.62 \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$3.63 \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$3.64 \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

След преработка на горните уравнения при приетото условие за несвиваем флуид се получава:

$$3.65 \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_T \frac{\partial u}{\partial x} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$3.66 \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_T \frac{\partial v}{\partial y} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_T \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$3.67 \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_T \frac{\partial w}{\partial z} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_T \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

Към тези уравнения се прибавя и уравнението за непрекъснатост:

$$3.68 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

В получените уравнения (3.11)÷(3.13) в дясната им страна се съдържат привидните турбулентни нормални и тангенциални напрежения:

$$3.69 \quad \sigma'_x = \mu_T \frac{\partial u}{\partial x} = \mu_T e_x$$

$$3.70 \quad \sigma'_y = \mu_T \frac{\partial v}{\partial y} = \mu_T e_y$$

$$3.71 \quad \sigma'_z = \mu_T \frac{\partial w}{\partial z} = \mu_T e_z$$

$$3.72 \quad \tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu_T e_{xy}$$

$$3.73 \quad \tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu_T e_{xz}$$

$$3.74 \quad \tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \mu_T \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu_T e_{yz}$$

Турбулентния динамичен вискозитет е величина, която зависи от координатите x, y, z и тя не може да се приеме еквивалентна на коефициента на динамичния вискозитет. От друга страна, турбулентните напрежения зависят от градиента на скоростните компоненти във всяка една точка на течението. Така получените стойности за σ' и τ' , може да се приеме, че отразява тримерността на течението чрез влиянието върху тях на градиентите на скоростните компоненти, респ. съставлящите на тензора на деформационите скорости:

$$3.75 \quad S = \begin{pmatrix} e_x, e_{yx}, e_{zx} \\ e_{xy}, e_y, e_{zy} \\ e_{xz}, e_{yz}, e_z \end{pmatrix}$$

Една подобна идея е заложена в програмните продукти Ansys и Fluent [14].

Тъй като при едно числено пресмятане на задачата е възможно определяне на разпределението на скоростните компоненти u, v и w , респ μ_t , не представлява трудност определянето и на σ' и τ'_{ij} .

Тензор на турбулентните напрежения

На основата на направеното дотук може да се запише тензорът на турбулентните напрежения

$$3.76 \quad \begin{pmatrix} \sigma'_x, \tau'_{yx}, \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy}, \sigma'_y, \tau'_{zy} \\ \tau'_{xz}, \tau'_{yz}, \sigma'_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \overline{\rho u'^2}, \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho v'^2}, \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho u'w'}, \overline{\rho w'v'}, \overline{\rho w'^2} \end{pmatrix}$$

Или като се имат предвид равенствата (3.69 ÷ 3.74), лявата част на (3.76) се замества, както следва:

$$3.77 \left| \begin{array}{l} \mu_T \frac{\partial u}{\partial x}, \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \mu_T \frac{\partial v}{\partial y}, \mu_T \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \mu_T \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \mu_T \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{l} \overline{\rho u'^2}, \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho v'^2}, \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho u'w'}, \overline{\rho w'v'}, \overline{\rho w'^2} \end{array} \right|$$

По този начин е очевидно определянето на рейнолдсовите напрежения със съответните им стойности в лявата страна на равенството в (3.23). Това позволява пресмятането на пълната картина на турбулентното течение – цялата гама от нормални и тангенциални турбулентни напрежения. При това може да се смята, че турбулентността е определена в тримерен вид.

При определянето на μ_T могат да се използват широка гама съвременни модели на турбулентност.

С получаването на μ_T се намира пълният спектър на турбулентността в тримерна постановка.

Подходът за решаване може да бъде следният: с използване на упоменатите по-горе програмни продукти се пресмята динамичният турбулентен вискозитет. По нататък е необходимо да се направи една не толкова трудна процедура на определяне на съставлящите на тензора (3.77). Разбира се, в интерес на истината се допуска известна неточност, че първоначално μ_T се определя в двумерна постановка, но това се компенсира със следващото разглеждане. То може да се приеме като едно второ, по-точно приближение на задачата.

Описаният метод на записване на уравненията на движение на турбулентния флуид позволява моделиране на тримерния спектър на турбулентност и решаване на практически задачи от механика на флуидите, топлотехника и др.

Уравненията за турбулентното движение в цилиндрични координатни система.

Тези уравнения се получават по аналогичен начин като при изведените по-горе уравнения в декартова координатна система. Видът им в координатна система (x, r, θ) е следният:

$$3.78. \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) -$$

$$- \nu_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

$$3.79. \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) -$$

$$- \nu_t \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$3.80. \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{vw}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) -$$

$$- \nu_t \left(\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right),$$

където лапласовият оператор ∇^2 е равен на

$$3.81 \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Заклучение: Изложените тук уравнения засега са основните и най-често използваните при решаване на турбулентни течения. На тяхна база са изградени използваните в инженерната практика съвременни софтуерни продукти. Разбира се при решаване на турбулентни течения се използват и други методи (метод на директното решаване на уравненията за движение на крупните вихри и др.). Всички тези методи са много добре формулирани и обосновани физически още през 50-те и 60-те години на миналия век [8]. Развитието на съвременната изчислителна техника ги връща към „нов живот“ и по-широко приложение.