



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

9) ИНТЕГРАЛНИ МЕТОДИ В ТЕОРИЯТА НА ТУРБУЛЕНТНИТЕ СТРУИ. СИСТЕМА ОТ ИНТЕГРАЛНИ УСЛОВИЯ НА ЛОЙЦЯНСКИ И ИЗПОЛЗВАНЕТО ИМ В ТЕОРИЯТА НА ТУРБУЛЕНТНИТЕ СТРУИ. НЕИЗОТЕРМИЧНИ ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ИНТЕГРАЛНИТЕ МЕТОДИ ПРИ РЕШАВАНЕ НА НАЧАЛНИЯ И ОСНОВНИЯ УЧАСТЪК НА СТРУЯ В СПЪТНО ТЕЧЕНИЕ

Интегрални методи в теорията на турбулентните струи. Система от интегрални условия на Лойцянский и използването им в теорията на турбулентните струи. Неизотермични турбулентни струи

Гранични условия при изтичане на двумерна струя в спътна среда („спътна среда“ е наличие на успоредно течение на основната струя). В този раздел се излага един нов подход за извод, приложение и преработка на интегралните условия, описващи турбулентна струя при най-общ модел на течението. Разглежда се завъртяна турбулентна струя, изтичаща симетрично на ос x. Граничните условия в основния участък от течението имат вида:

– за оста на течението

$$\begin{array}{l|l}
 r = 0 & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad v = w = 0 \\
 \\
 4.14a. (y = 0) & \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\
 \\
 & \text{при завъртени струи - } p = p_{\min}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0
 \end{array}$$

- за външната струйна граница

$$\begin{aligned}
 & u = u_2 \quad (u = 0), w = 0 \\
 & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\
 4.146. \quad & r = b \quad \overline{v'w'} = \overline{u'v'} = 0, \quad \overline{v'T'} = \overline{v'c'} = 0 \\
 & (y = b) \\
 & \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\
 & \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial y} = 0 \\
 & \rho = \rho_{\text{окол.}}, \quad T = T_2, \quad c = c_2 \quad (\chi = \chi_2), \quad p = p_{\text{окол.}}
 \end{aligned}$$

При изследване на незавъртени струи от граничните условия (4.14) отпадат членовете, съдържащи скоростната компонента w , както и съответстващите ѝ корелации. Налягането се приема равно на това в околната среда. При изтичане в неподвижна флуидна среда ($u_2 = 0$) се променя само първото условие от 4.146, докато останалите остават същите.

Интегрални условия по [6]. Изводът на интегралните условия при турбулентни струи се прави на основата на системата частни диференциални уравн. 4.3-4.16, респ. 4.8-4.13, при съблюдаване на граничните условия 4.14.

Уравнението за количество на движение се получава, като се използват уравн. 4.8-4.9. Първото уравнение се умножава по u и се събира с второто, предварително умножено с y^j , от което следва

$$4.15. \frac{\partial}{\partial x} [(\rho u^2 + p) \cdot y^j] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho \cdot (u \cdot v + \overline{u'v'}) \cdot y^j] = 0$$

При наличие на спътно течение, движещо се със скорост u_2 , уравнението приема вида

$$4.16. \frac{\partial}{\partial x} \{[\rho u \cdot (u - u_2) + p] \cdot y^j\} + \frac{\partial}{\partial y} \{\rho \cdot [v \cdot (u - u_2) + \overline{u'v'}] \cdot y^j\} = 0$$

Уравнения 4.15 и 4.16 се интегрират напречно на струйното течение в граници от $y = 0$ до $y = b$ (външната струйна граница):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^b (\rho u + p) \cdot y^j \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^b \rho \cdot (u \cdot v + \overline{u'v'}) \cdot y^j \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^b \{\rho \cdot [u \cdot (u - u_2)] + p\} \cdot y^j \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^b \rho \cdot [v \cdot (u - u_2) + \overline{u'v'}] \cdot y^j \cdot dy = 0$$

Вторият интеграл в горните уравнения приема стойност нула в границите на интегриране, при което се получават

интегралните условия при свободна струя и за изтичане в спътна среда:

$$4.17. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b (\rho \cdot u^2 + p) \cdot y^j \cdot dy = 0, \text{ респ. } (2\pi)^j \int_0^b (\rho \cdot u^2 + p) \cdot y^j \cdot dy = I_0$$

$$4.18. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b [\rho \cdot u \cdot (u - u_2) + p] \cdot y^j \cdot dy = 0, \text{ респ. } (2\pi)^j \int_0^b [\rho \cdot u \cdot (u - u_2) + p] \cdot y^j \cdot dy = I_0$$

Интегралното условие за количеството на движение може да се изведе и при запазване в изходните уравнения на нормалните турбулентни напрежения $\overline{\rho u'^2}$. В този случай уравн. 4.18 приема вида

$$4.19. (2\pi)^j \int_0^b \left\{ \rho \cdot [u \cdot (u - u_2) + \overline{u'^2}] + p \right\} \cdot y^j \cdot dy = I_0,$$

където I_0 - начално количество на движение.

Моментът на количество на движение е определяща интегрална характеристика за завъртените струйни течения. Чрез нея се изразява специфичната особеност на този тип течения - завъртането и неговата интензивност. Посредством момента на количеството на движение се отразява ефектът от въртенето върху развитието на течението.

Определянето на момента на количество на движение се прави на основата на уравн. 4.8 и 4.11, като първото, умножено по $w.y^j$, се сумира с второто, предварително умножено с y^{2j} :

$$4.20. \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho u w + \rho \overline{u'w'}) \cdot y^{2j} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\rho w v + \rho \overline{w'v'}) \cdot y^{2j} \right] + y^j \cdot \rho w v + \rho \overline{v'w'} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y^{2j}) = 0$$

Уравнение 4.20 се интегрира напречно по y в струйния граничен слой от 0 до ∞ , респ. 0 до b , както следва:

4.21

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty (\rho u w + \rho \overline{u'w'}) \cdot y^{2j} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty (\rho w v + \rho \overline{w'v'}) \cdot y^{2j} \cdot dy + \int_0^\infty \rho w v \cdot y^j \cdot dy + \int_0^\infty 2 \rho \overline{v'w'} \cdot y^j \cdot dy = 0$$

Вторият, третият и четвъртият интеграл се анулират за границите на интегриране, при което се получава

$$4.21a \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty(b)} (\rho u w + \rho \overline{u'w'}) y^{2j} dy = 0$$

Интегрирано по x , води до израза

$$4.22. \int_0^{\infty} (\rho \cdot u \cdot w + \rho \cdot \overline{u'w'}) \cdot y^{2j} \cdot dy = const$$

Изразът (4.22) е една важна характеристика на завъртяната турбулентна струя - описва запазването на момента на количество на движение. Това съгласно Л.Г.Лойцянский [21,22] е второто задължително интегрално условие при завъртените течения, което дава възможност за въвеждане на съответен критерий за подобие при тях.

Тъй като моментът на количество на движение се отнася до едно ососиметрично течение ($j=1$), може да се премине в цилиндрична координатна система, при което се заменя y с r . След умножение по 2π на двете страни на 4.22 следва

$$4.23. 2\pi \int_0^{\infty} (\rho \cdot u \cdot w + \rho \cdot \overline{u'w'}) \cdot r^2 \cdot dr = M_0,$$

където M_0 е началният момент на количество на движение:

$$4.24. M_0 = \pi \cdot \rho \cdot u_0 \cdot w_0 \cdot r_0^3$$

При пренебрегване влиянието на двоичната корелация $\overline{\rho u'w'}$ като величина от по-нисък порядък, в сравнение с $u.w$, ($\overline{u'w'} \ll u.w$), 4.23 приема вида

$$4.25. \quad 2\pi \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot w \cdot r^2 \cdot dr = M_0$$

Моментът на количество на движение съдържа в себе си произведение на скоростни компоненти, характерен размер на течението и плътност. Условно може да се разгледа като въртене на флуиден обем с маса $2\pi \cdot \rho \cdot u \cdot r \cdot dr$ с тангенциална (завъртаща) скорост w на разстояние r от оста на симетрия.

Условието за запазване на съдържанието на примеси в струйното течение се получава при съответна съвместна преработка на уравненията за непрекъснатост и за концентрацията на примесите. Уравненията се умножават съответно по x и y^j , след сумирането им се получава

$$4.26. \quad \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot \chi \cdot y^j) + \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot \chi \cdot y^j) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \cdot y^j \cdot \frac{v_t}{Sc} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)$$

Уравнение 4.26 се интегрира напречно по y в граници от 0 до y_p , респ. от 0 до ∞ :

$$4.27. \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u \cdot \chi \cdot y^j \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} v \cdot \chi \cdot y^j \cdot dy = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} \rho \cdot y^j \cdot \frac{v_t}{Sc} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot dy$$

Тъй като за границите на интегриране се анулират вторият и третият интеграл, от 4.27 следва

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot \chi \cdot y^j \cdot dy = 0$$

След интегриране по x се получава условието за запазване на съдържанието на примеси в струята

$$4.28. \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot \chi \cdot y^j \cdot dy = const$$

Уравнението, умножено по $2\pi^j$, дава израза

$$4.29. (2\pi)^j \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot \chi \cdot y^j \cdot dy = G_0,$$

където G_0 е началното съдържание на примеси: $G_0 = \pi^j \cdot \rho_p \cdot u_0 \cdot y_0^{j+1}$

Уравнение 4.29, приложено за ососиметрични струи ($j = 1, y = R$), има вида

$$4.30a. \quad 2\pi \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot \chi \cdot r \cdot dr = \pi \cdot \rho_p \cdot u_0 \cdot r_0^2$$

и съответно за плоски (равнинни) струи ($j = 0$):

$$4.30b. \quad \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot \chi \cdot dy = \rho_p \cdot u_0 \cdot b_0$$

Получените уравнения изразяват условието за запазване на съдържанието на примеси в струйно течение съответно в диференциален и интегрален вид.

Уравнението за кинетичната енергия се получава, като се преработят уравн. 4.8 и 4.9. Те се умножават съответно по $\rho \cdot (u^2 - u_2^2)$ и $2(u - u_2) \cdot y^j$ и след почленно сумиране се получава

$$4.31. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot y^j \cdot u (u^2 - u_2^2) \right] + 2(u - u_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot y^j) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot v (u^2 - u_2^2) \right] =$$

$$2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(v_i \cdot y^j \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho \cdot y^j \cdot v_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Уравн.4.31, интегрирано в граници от 0 до b , респ. от 0 до ∞ , води до израза

$$4.32. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot (u^2 - u_2^2) \cdot y^j \cdot dy + \int_0^{\infty} 2(u - u_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot y^j) \cdot dy = -2 \int_0^{\infty} \rho \cdot v_t \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot y^j \cdot dy$$

Полученото уравнение описва кинетичната енергия при завъртяна струя, изтичаща в еднородна спътна среда, която се движи със скорост u_2 . Уравнението за свободна струя може да се получи чрез полагане $u_2 = 0$:

$$4.33. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho \cdot u^3 \cdot y^j \cdot dy + 2 \int_0^{\infty} u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y^j \cdot dy = -2 \int_0^{\infty} \rho \cdot v_t \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot y^j \cdot dy$$

За незавъртени струи ($p = 0$) уравн. 4.32 и 4.33 приемат вида:

$$4.34a. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho \cdot u \cdot (u^2 - u_2^2) \cdot y^j \cdot dy = - \int_0^{\infty} \rho \cdot v_t \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot y^j \cdot dy$$

$$4.346. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho u^3 \cdot y^j \cdot dy = - \int_0^{\infty} \rho v_t \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot y^j \cdot dy$$

Интегрални условия по Г. Н. Абрамович [1,2]. При двумерни (плоски и ососиметрични) струи на несвиваем флуид, липса на градиент на налягането и на източници на топлина и примеси могат да се използват три системи от интегрални условия. Съгласно [2] те имат вида:

$$4.35. \frac{d}{dx} \int_0^{b(y_2)} u \cdot (u - u_2)^{k+1} \cdot y^j \cdot dy = k \cdot (k+1) \int_0^{b(y_2)} (u - u_2)^{k-1} \cdot \overline{u'v'} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y^j \cdot dy$$

$$4.36. \frac{d}{dx} \int_0^{b(y_2)} u \cdot (T - T_2)^{k+1} \cdot y^j \cdot dy = k \cdot (k+1) \int_0^{b(y_2)} (T - T_2)^{k-1} \cdot \overline{T'v'} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot y^j \cdot dy$$

$$4.37. \frac{d}{dx} \int_0^{b(y_2)} u \cdot (\chi - \chi_2)^{k+1} \cdot y^j \cdot dy = k \cdot (k+1) \int_0^{b(y_2)} (\chi - \chi_2)^{k-1} \cdot \overline{\chi'v'} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} \cdot y^j \cdot dy$$

При стойност на коефициента $k=0$ от системата интегрални условия (4.35 – 4.36) се получава условието за запазване на количеството на движение, а при $k=1$ – за кинетичната енергия. При $k=0$ за (4.36) и (4.37) следват интегралните условия за запазване на топло- и масосъдържанието. За всички останали случаи ($k>1$ за системата

4.35 и $k > 0$ за останалите две) получените интегрални условия нямат физическа интерпретация, което не означава обаче, че не могат да се прилагат при решаване на конкретни задачи.

Изводът на тази система от интегрални условия е направен коректно на основата на уравненията за струйния граничен слой в [2].

Интегрални условия на В. В. Голубев [2]. Интегралните условия на В.В.Голубев имат вида

$$4.38. \frac{d}{dx} \int_0^b u \cdot (u^{k+1} - u_2^{k+1}) \cdot y^j \cdot dy = (k+1) u_2' \int_0^b (u_2 \cdot u^k - u u_2^k) \cdot y^j \cdot dy - k \cdot (k+1) \int_0^b \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y^j \cdot dy = 0,$$

от които при $k = 0$ се получава условието за запазване на количество на движение, а при $k = 1$ - за енергията.

Интегрални условия на Л. Г. Лойцянский [2, 22]. Системата интегрални условия на Лойцянский има вида

$$4.39. \frac{d}{dx} \int_0^{b(y_2)} u \cdot (u - u_2) \cdot y^{j+k} \cdot dy - k \int_0^{b(y_2)} (u - u_2) \cdot v \cdot y^{j+k-1} \cdot dy = k \int_0^{b(y_2)} u' v' \cdot y^{j+k-1} \cdot dy,$$

където k , приемайки стойности 0, 1, 2, ..., в (4.39), описва системата интегрални условия на Лойцянский.

Интегралните условия на Голубев и Лойцянский дават близки резултати при решение на струйни течения с постоянно налягане. Съгласно [2] в някои случаи интегралните условия на Лойцянский дават по-добри резултати, например при изследване на следа далече от обтечено тяло.

Приложение на интегралните методи при решаване на началния и основния участък на струя в спътно течение

Изследва се разпространение на двумерна турбулентна струя в спътно течение с постоянна скорост $u_2 = const$. Приема се подобие на скоростното разпределение в отделните напречни сечения. За решението се използват две интегрални условия, получени от уравн.(4.35) при $k=0$ и $k=1$ - съответно за количеството на движение и за енергията на струйното течение. Тези интегрални условия, приложени за основния участък от течението, имат вида:

$$4.40. \frac{d}{dx} \int_0^b u \cdot (u - u_2) \cdot y^j \cdot dy = 0$$

$$4.41. \frac{d}{dx} \int_0^b u \cdot (u - u_2)^2 \cdot y^j \cdot dy = -2 \cdot \int_0^b \frac{\tau_T}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y^j \cdot dy$$

Левите страни на горните изрази се разделят на два интеграла:

$$4.42. \frac{d}{dx} \int_0^b (u - u_2)^2 \cdot y^j \cdot dy + u_2 \left[\frac{d}{dx} \int_0^b (u - u_2) \cdot y^j \cdot dy \right] = 0$$

$$4.43. \frac{d}{dx} \int_0^b (u - u_2)^3 \cdot y^j \cdot dy + u_2 \left[\frac{d}{dx} \int_0^b (u - u_2)^2 \cdot y^j \cdot dy \right] = -2 \cdot \int_0^b \frac{\tau_T}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y^j \cdot dy$$

Приема се, че безразмерният скоростен профил по напречните сечения се описва със зависимостта на Шлихтинг:

$$4.44. f(\eta) = \frac{u - u_2}{u_m - u_2} = \left(1 - \eta^{3/2}\right)^2, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

За затваряне на системата уравнения за движение се използва хипотезата на Прандтл [1, 40] за пътя на размесване:

$$4.45. \frac{\tau_T}{\rho} = -\overline{u'v'} = -l_u^2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad l_u = \beta \cdot b$$

След съответна преработка на уравн.(4.42) и (4.43) се получава:

$$4.46. \frac{d}{dx} \left[u_m^2 \cdot b^{j+1} \cdot A_1 \right] + u_2 \cdot \frac{d}{dx} \left[u_m^* \cdot A_2 \right] = 0$$

$$4.47. \frac{d}{dx} \left[u_m^3 \cdot b^{j+1} \cdot A_3 \right] + u_2 \cdot \frac{d}{dx} \left[u_m^2 \cdot b^{j+1} \cdot A_1 \right] = 2\beta \cdot u_m^3 \cdot b^{j+1} \cdot B,$$

където:

$$4.48. A_1 = \int_0^1 [f(\eta)]^2 \cdot \eta^j \cdot d\eta; A_2 = \int_0^1 [f(\eta)] \cdot \eta^j \cdot d\eta; A_3 = \int_0^1 [f(\eta)]^3 \cdot \eta^j \cdot d\eta;$$

$$B = \int_0^1 [f(\eta)]^3 \cdot \eta^j \cdot d\eta; u_m^* = u_m - u_2$$

Стойностите на горните интегралы са дадени в табл.4.1.

Таблица 4.1

вид на струята	плоска	ососиметрична
	$j = 0$	$j = 1$
A_1	0,316	0,067
A_2	0,550	0,164
A_3	0,250	0,044
B	-1,420	-0,601
β по [2]	0,097	0,090

Системата уравнения (4.46-4.47) се решава числено относно приведената максимална скорост u_m^* и дебелината на струйния граничен слой b .

Едно опростено решение е дадено в [2] за свободна турбулентна струя ($u_2 = 0$, $u_m^* = u_m$). При този частен случай системата (4.46 - 4.47) приема вида:

$$\frac{d}{dx} \cdot [u_m^2 \cdot b^{j+1} \cdot A_1] = 0$$

4.50.

$$\frac{d}{dx} \cdot [u_m^3 \cdot b^{j+1} \cdot A_3] = 2 \cdot \beta^2 \cdot u_m^3 \cdot b^j \cdot B$$

Решението се прави аналитично, като се определят интегралните параметри на течението. Затихването на максималната скорост и разширението на струйния граничен слой се описват с изразите, получени от съвместното решение на горните уравнения:

– за плоска струя ($j = 0$):

$$4.51. \quad b = 22,7 \cdot \beta^2 \cdot x \quad ; \quad u_m = \left(\frac{I_0}{0,316 \cdot b} \right)^{1/2} ; \quad I_0 = b_0 u_0^2$$

– за ососиметрична струя ($j = 1$):

$$4.52. \quad b = 27,3 \cdot \beta^2 \cdot x \quad ; \quad u_m = \left(\frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot 0,067} \right)^{1/2} \cdot b^{-1} ; \quad I_0 = \pi r_0^2 u_0^2 ,$$

където b_0 и r_0 са съответно начална широчина и радиус на струята.

По аналогичен начин може да се изследва и началният участък от течението. Подобни решения са дадени в [2, 8].

В [2] са приведени резултати от аналитичното изследване на плоска турбулентна струя, изтичаща в спътно неограничено течение. Получени са следните зависимости:

- за дебелината на струйния граничен слой

$$4.53. \quad b = 40,9 \cdot \beta^2 \cdot \left[\frac{|1-m|}{1+0,935 \cdot m} \right] \cdot x$$

- за границата на потенциалното ядро

$$4.54. \quad y_1 = 1 - (0,134 \cdot m + 0,416) \cdot b$$

- за външната граница на слоя на размесване

$$4.55. \quad y_2 = (0,584 - 0,134 \cdot m) \cdot b$$

– за дължината на началния участък

$$4.56. \ x_n = \frac{1 + 0,935.m}{40,9.\beta^2 \cdot |1 - m| \cdot (0,134.m + 0,416)},$$

където е означено $m = \frac{u_2}{u_1}$

С показаните примерни решения в този раздел се илюстрира начинът на приложение на интегралните методи. Повече данни за развитието на тези методи у нас през последните тридесет години могат да се намерят в обзорните статии [7, 55].