



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

12) ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ С ПРОМЕНЛИВА ПЛЪТНОСТ**Турбулентни струи с променлива плътност**

При изтичане на загрята турбулентна струя в безкрайно спътно течение възниква една сложна картина на взаимодействие. Двете течения имат различна скорост, температура и плътност ($u_1 \neq u_2$, $T_1 \neq T_2$, $\rho_1 \neq \rho_2$).

В зоната на взаимодействие между тях (в струйния граничен слой) се наблюдава силно изразен напречен градиент на скоростта, температурата и съответно на плътността на течението. За отдалечените сечения от изходящото извън началния участък, както сочат експерименталните изследвания, се наблюдава автомоделност относно безразмерното напречно разпределение от вида:

$$5.1. f_u = \Delta u / \Delta u_m = (u - u_2) / (u_m - u_2) = f(\eta)$$

$$f_h = \Delta h / \Delta h_m = f_h(\eta)$$

$$f_c = \Delta c / \Delta c_m = f_c(\eta),$$

като за безразмерните функции съгласно [3] се препоръчват зависимостите за $f(\eta)$ по 4.55, за останалите

$$f_c(\eta) = f_h(\eta) = [f(\eta)]^{1/2}$$

Затихването на максималните стойности на скоростта, енталпията и концентрацията на примеси при изотермичните струи може да се представи с изразите:

$$5.1a. \frac{u_m - u_2}{u_{mo} - u_2} = C_u \cdot \left(\frac{x}{b_o} \right)^{-k_u} \quad \frac{h_m - h_2}{h_{mo} - h_2} = C_h \cdot \left(\frac{x}{b_o} \right)^{-k_h}$$

$$\frac{c_m - c_2}{c_{mo} - c_2} = C_c \cdot \left(\frac{x}{b_o} \right)^{-k_c},$$

където: k_u , k_h и k_c са степенни показатели, а C_u , C_h и C_c - интеграционни константи съответно за скоростите, енталпията и концентрацията.

Уравненията за движение, енергия, пренос на примеси и за непрекъснатост съгласно [3] имат вида:

$$5.2. \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 y^j) + \frac{\partial}{\partial y} \left[u (\rho v + \overline{\rho'v'}) y^j \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} y^j - \frac{\partial}{\partial y} (y^j \rho \overline{u'v'}) + \Pi_1$$

$$5.3. \frac{\partial}{\partial x}(\rho u h y^j) + \frac{\partial}{\partial y} \left[h(\rho v + \overline{\rho'v'}) y^j \right] = -\frac{\partial}{\partial y} (y^j \overline{\rho h'v'}) + \Pi_2$$

$$5.4. \frac{\partial}{\partial x}(\rho u c y^j) + \frac{\partial}{\partial y} \left[c(\rho v + \overline{\rho'v'}) y^j \right] = -\frac{\partial}{\partial y} (y^j \overline{\rho c'v'}) + \Pi_3$$

$$5.5. \frac{\partial}{\partial x}(\rho u y^j) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v + \overline{\rho'v'}) y^j = 0$$

където: Π_1, Π_2, Π_3 са членове, свързани с молекулярния пренос:

$$\Pi_1 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \Pi_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right); \quad \Pi_3 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Sc} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

Неизвестни величини в (5.2 - 5.5) са скоростните компоненти u и v , налягането p , плътността ρ , енталпията h , масовата концентрация c и съставлящите на тензора на турбулентните тангенциални напрежения - $\overline{u'v'}$, $\overline{\rho'v'}$, $\overline{h'v'}$ и $\overline{c'v'}$. Получава се система с десет неизвестни, от които 6 се отнасят до осреднените по време параметри на течението. Към системата трябва да се добави уравнението за състоянието (при изследване на газова среда) и уравнението за движение по оста y . В противен случай системата, предложена в [3], е нерешима. Тези уравнения се записват във вида:

$$5.6. \rho = \frac{p}{RT}$$

$$5.7. \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (y' \overline{v'^2}) \right]$$

Отчитането на напречния градиент на налягането е наложително, тъй като оказва немалко влияние върху развитието на течението.

Моделиране на турбулентните напрежения и турбулентния топло- и масопренос. Като се използва хипотезата на Бусинекс, сравнително лесно могат да се определят всички турбулентни съставлящи на горните уравнения (виж. уравн. 3.7 - 3.9), освен $\overline{\rho'v'}$. Това напрежение е твърде важно при течения с променлива плътност, но за него има много малка емпирична и теоретична информация. За случаи на локална изотропна турбулентност може да се приеме следната зависимост за $\overline{\rho'v'}$:

$$5.8. \overline{\rho'v'} = -D_\rho \frac{\partial \rho}{\partial y},$$

като коефициентът D_ρ се определя чрез енергийния спектър на течението.

Интегралните условия се получават след преработка на уравн. (5.2 - 5.4) и имат следния вид:

- за запазване на количеството на движение

$$5.9. \frac{d}{dx} \int_0^b [\rho u (u - u_2) + p] y^j dy = 0$$

- за запазване на количеството примеси

$$5.10. \frac{d}{dx} \int_0^b \rho \cdot c \cdot u \cdot y^j dy = 0$$

- за запазване на енталпията

$$5.11. \frac{d}{dx} \int_0^b \rho \Delta h u y^j dy = 0$$

Течението може да се решава с приложение на интегрални методи на основата на уравн. (5.9 – 5.11) или при използване на подходящ модел на турбулентност по метода на крайните разлики.

Вертикално изтичащите струи с променлива плътност представляват интерес от теоретична и практическа гледна точка. Поради разликата в плътностите на струята и околната среда възниква подемна сила. Тази сила, известна още и като "архимедова сила", въздейства върху флуидното течение и за даден елементарен участък от него с дължина dx е

$$5.12. dF_A = - \left[\int_f (\rho - \rho_{ok}) g df \right] dx$$

Основни числа на подобие са числото на Грасхоф, което представлява отношение на подемната сила към силата от вътрешно триене:

$$5.13. Gr = g (\rho_{ok} - \rho) \frac{d^3}{(\rho \nu^2)}$$

или числото на Архимед

$$5.14. Ar = \left(\frac{\rho_{ok}}{\rho} - 1 \right) \frac{gd}{u^2}$$

При моделиране на подобни течения се използват също и числата на Рейнолдс и Фруд:

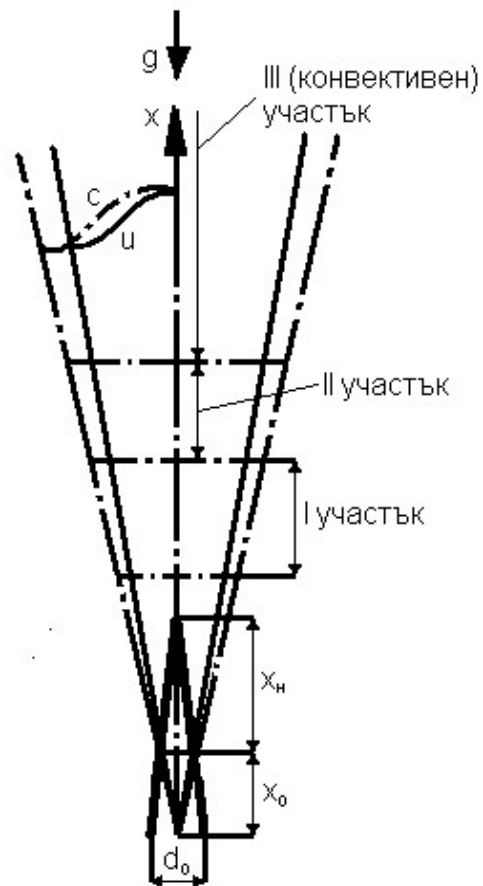
$$5.15. \text{ а) } Re = \frac{ud}{\nu}, \quad \text{ б) } Fr = \frac{Re^2}{Gr}$$

В случаите, когато съществува градиент на плътността на околната среда $\rho_{ok}(x)$ (при стратификация на околната среда), съгласно Шец се прилага и един добавъчен комплекс:

$$5.16. S = - \left[\frac{g}{\rho_{ok}(0)} \right] \frac{d\rho_{ok}(x)}{dx}$$

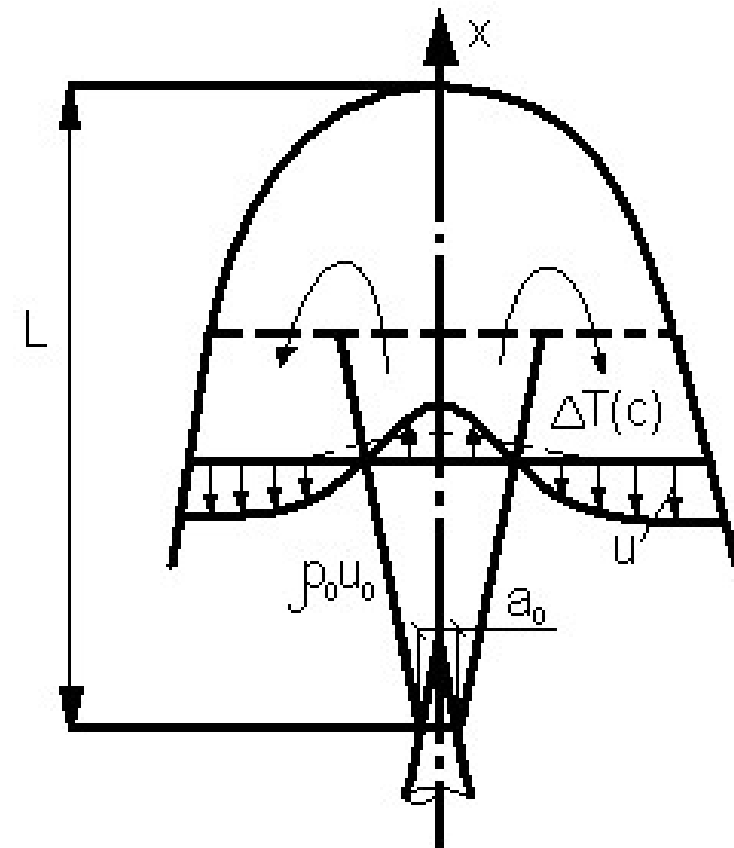
Вертикалните течения с променлива плътност се делят на:

- струи с положителна подъемна сила, при които направлението на течението и на подъемната сила съвпадат (фиг.5.1 а);
- струи с отрицателна подъемна сила, когато посоките на течението и на подъемната сила са противоположни (фиг.5.1 б). Течение със стратификация е показано на фиг. 5.2.



Фиг.5.1а

Фиг.5.1б



При вертикалните струи с положителна подъемна сила се наблюдават тр

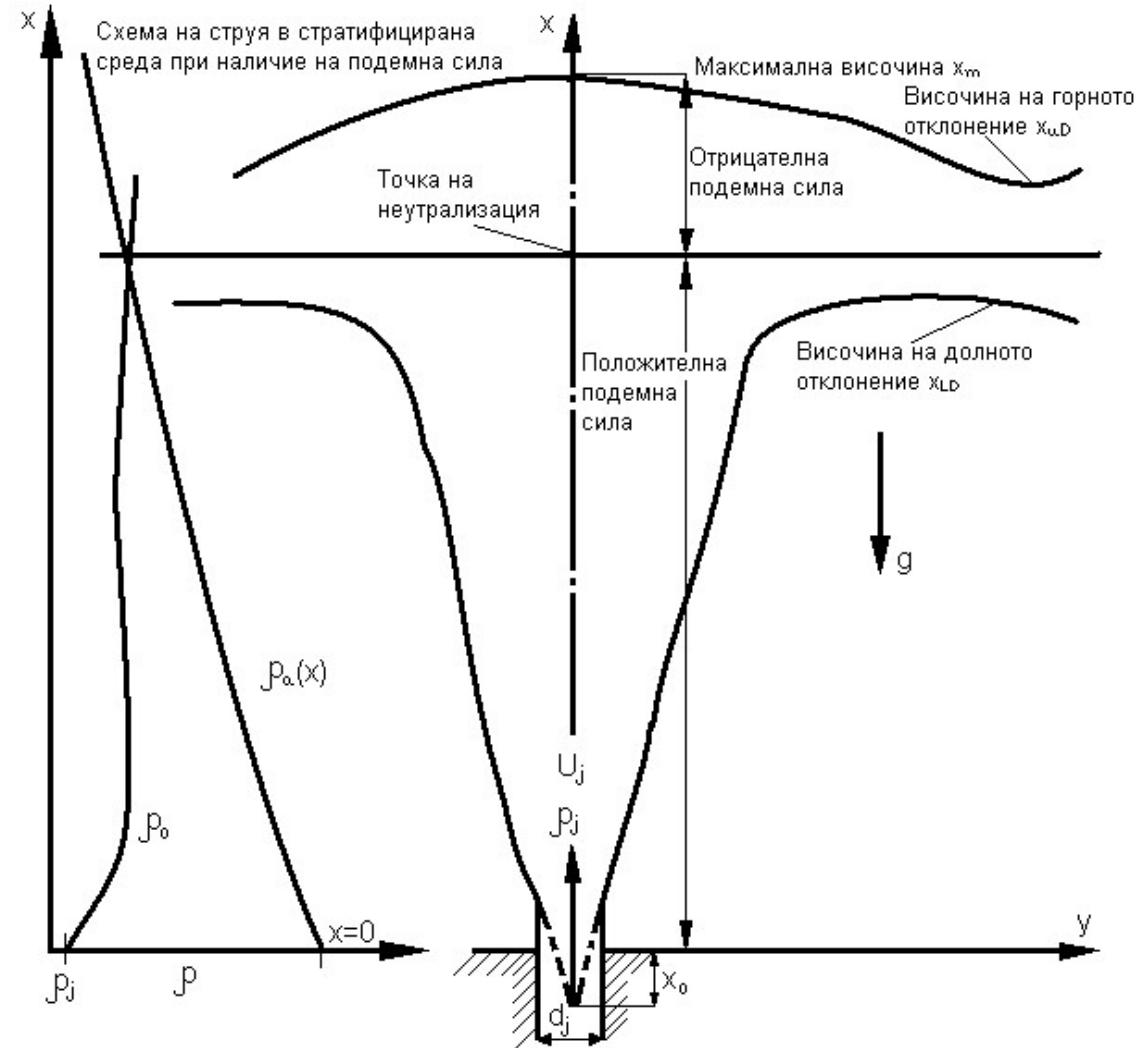
а) В първата област определящи са инерционните сили. Подъемната сила в сравнение с инерционната е пренебрежимо малка. Течението не се различава съществено от това на свободна струя, съществува автомоделност при скоростното разпределение.

б) Втората област е преходна. В нея течението се трансформира непрекъснато под действието на съизмеримите вече подемна и инерционна сила. Автомоделност не съществува.

в) В третата област определяща е подемната сила. Течението наподобява това при конвективните струи. Съществува определена автомоделност при разпределение на параметрите.

Решението на вертикална струя с положителна подемна сила съгласно [3] може да се направи по интегрален метод.

Г. Н. Абрамович предлага използване на две интегрални условия - за количеството на движение и за изнасяния вертикално нагоре масов дебит, записани във вида :



Фиг.5.2

$$5.17. \frac{d}{dx} \int_0^b \rho u^2 (\pi y)^j dy = -g \int_0^b (\rho - \rho_{ok}) (\pi y)^j dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^b u (\rho - \rho_{ok}) (\pi y)^j dy = 0$$

За затварящо системата условие се приема дебелината на струйния граничен слой, определена като линейна функция от надлъжната координата:

$$5.18. b = c_b x,$$

където c_b - коефициент на пропорционалност.

Това условие би могло да се замени с уравнение за енергията на течението с цел да се избегне линеаризацията на задачата. Даденото в [3] решение е направено при $\rho_m \approx \rho_{ok}$, което е валидно за голямо отстояние от началното сечение. Уравн. (5.17) могат да се решат числено още от края на началния участък, с което се избягва горното опростяващо условие.

Решението съгласно Г.Н.Абрамович [3], независимо от приблизителния му характер, представлява интерес от инженерна гледна точка, тъй като в една приемлива форма дава затихването на основните параметри в зависимост от началните условия на течението. След решаване на интегралите и съответна преработка на уравн.(5.17) при съблюдаване на условието (5.18) се получава:

$$\frac{du_m}{db} + \frac{(j+1)u_m}{2b} = -\left(\frac{A_2}{2A_1c}\right)\left[\frac{g(\rho_m - \rho_{ok})}{\rho_{ok}u_m}\right]$$

5.19.

$$\rho_m - \rho_{ok} = \frac{C_*}{2A_3u_mb^{j+1}},$$

в уравн. (5.19) са въведени означенията:

$$A_1 = \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^j \frac{dy}{b} \quad A_2 = \int_0^1 \left(\frac{\rho - \rho_{ok}}{\rho_m - \rho_{ok}}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^j \frac{dy}{b}$$

5.20.

$$A_3 = \int_0^1 \frac{u}{u_m} \left(\frac{\rho - \rho_{ok}}{\rho_m - \rho_{ok}}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^j \frac{dy}{b} \quad C_* = \frac{1}{4^j} (\rho_o - \rho_{ok}) U_o d_o^{j+1},$$

където ρ_o , u_o , d_o са параметри в началното сечение на струята.

Решението, което е дадено подробно в цитираната по-горе литература, води до следните зависимости за максималните стойности на параметрите в първия и третия участък на течението:

$$5.21. \quad \overline{u_m} = A_u n^{-1/2} (\overline{x})^{-(j+1)/2} \quad \overline{u_m} = B_u A r_o^{1/3} n^{-1/3} (\overline{x})^{-j/3}$$

$$5.22. \overline{\Delta\rho_m} = A_\rho n^{1/2} (\bar{x})^{-(j+1)/2} \quad \overline{\Delta\rho_m} = B_\rho A r_o^{1/3} n^{1/2} (\bar{x})^{-2/3^{j+1}}$$

$$5.23. \overline{c_m} = A_c n^{-1/2} (\bar{x})^{-(j+1)/2} \quad \overline{c_m} = B_c A r_o^{-1/3} n^{-2/3} (\bar{x})^{-2/3^{j+1}}$$

Постоянните в горните уравнения са дадени в табл. 5.1

Таблица 5.1

A_u	$(2^{2j+1} A_1 c_{b1}^{j+1})^{-1/2}$	A_ρ	$A_u^{-1} (2^{2j+1} A_3 c_{b1}^{j+1})^{-1}$
B_u	$\left\{ \frac{3A_2}{\left[2^{2j+1} (j+3) A_1 A_3 c_{b2}^{j+1} \right]} \right\}^{\frac{1}{3}}$	B_ρ	$B_u^{-1} (2^{2j+1} A_3 c_{b2}^{j+1})^{-1}$

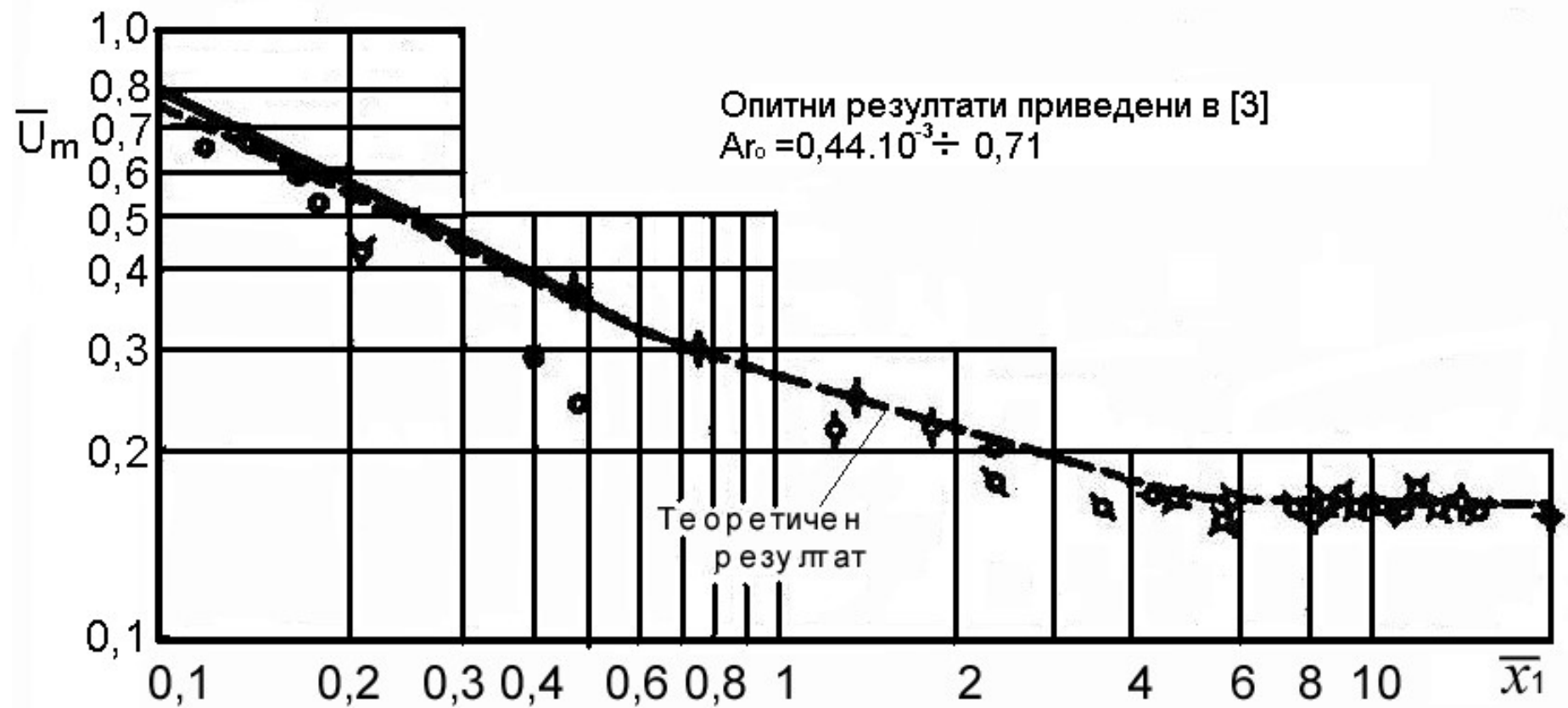
Максималните стойности на параметрите са обезразмерени с тези в началното сечение: $\bar{u}_m = u_m / u_o$, $\overline{\Delta\rho} = \Delta\rho_m / \Delta\rho_o$, $\bar{c}_m = c_m / c_o$. Безразмерното отношение на плътностите е $n = \rho_{ok} / \rho_o$. Фигуриращите в израза за разширение на струйния граничен слой c_{b1} и c_{b2} (5.18) се изменят в първи и трети участък от струята. Постоянните A_c и B_c се определят, като се има предвид връзката

$$5.24 \quad \overline{\Delta\rho_m} = c_m n$$

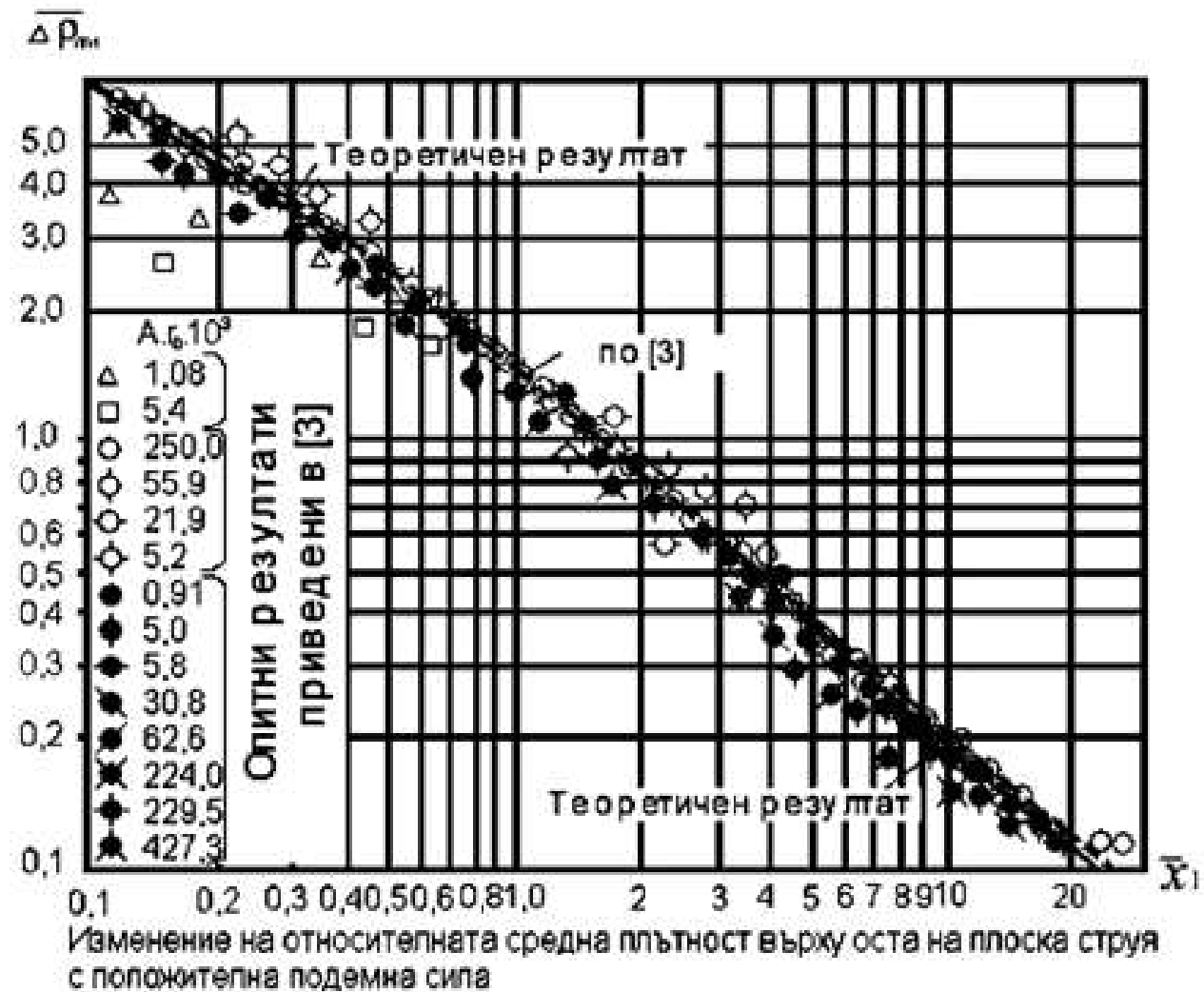
Затихването на максималната температурна разлика ΔT_m може да се приеме за аналогично на затихването на скаларна променлива - c_m : $\Delta \bar{T}_m \approx \bar{c}_m$.

На фиг. 5.3.а е дадено сравнение с опитни данни за затихването на максималната скорост при плоска струя съгласно [3].

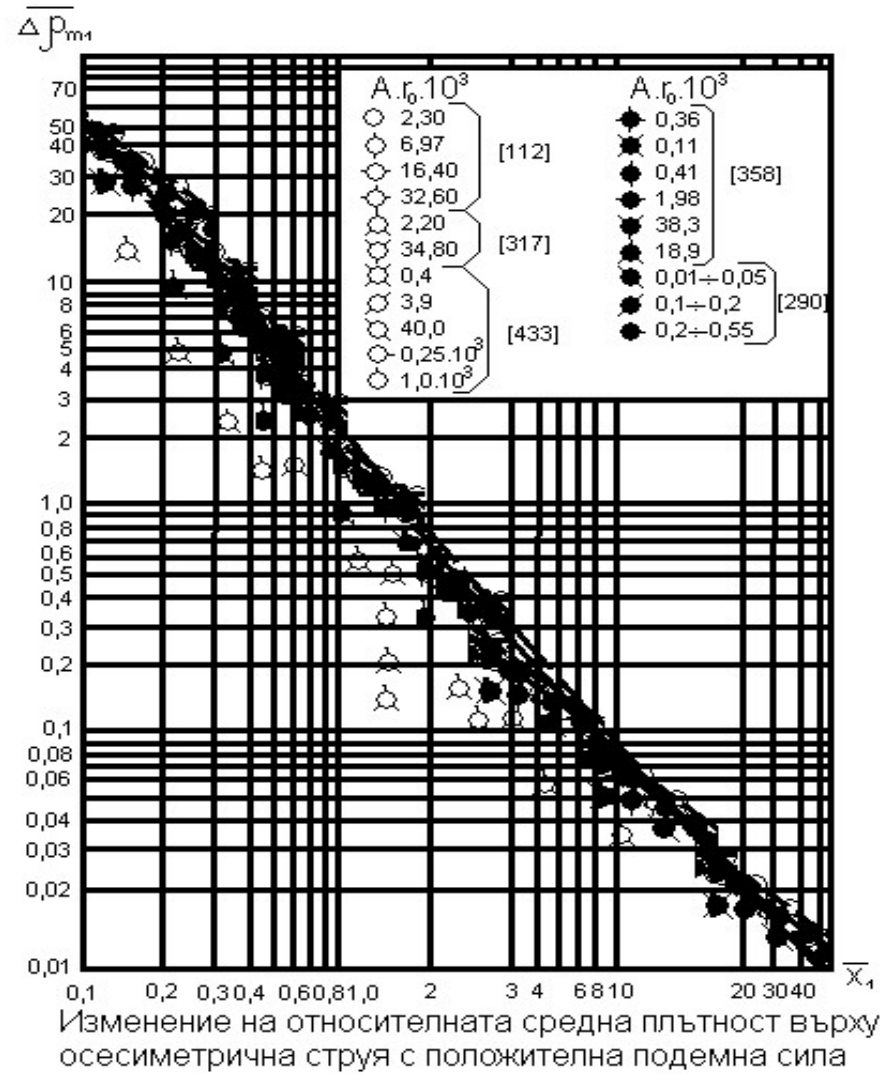
Изменението на относителната разлика в плътностите по оста на плоска и ососиметрична струя с положителна подъемна сила, сравнено с опитни данни, е дадено на фиг. 5.3 б и в.



Фиг.5.3а



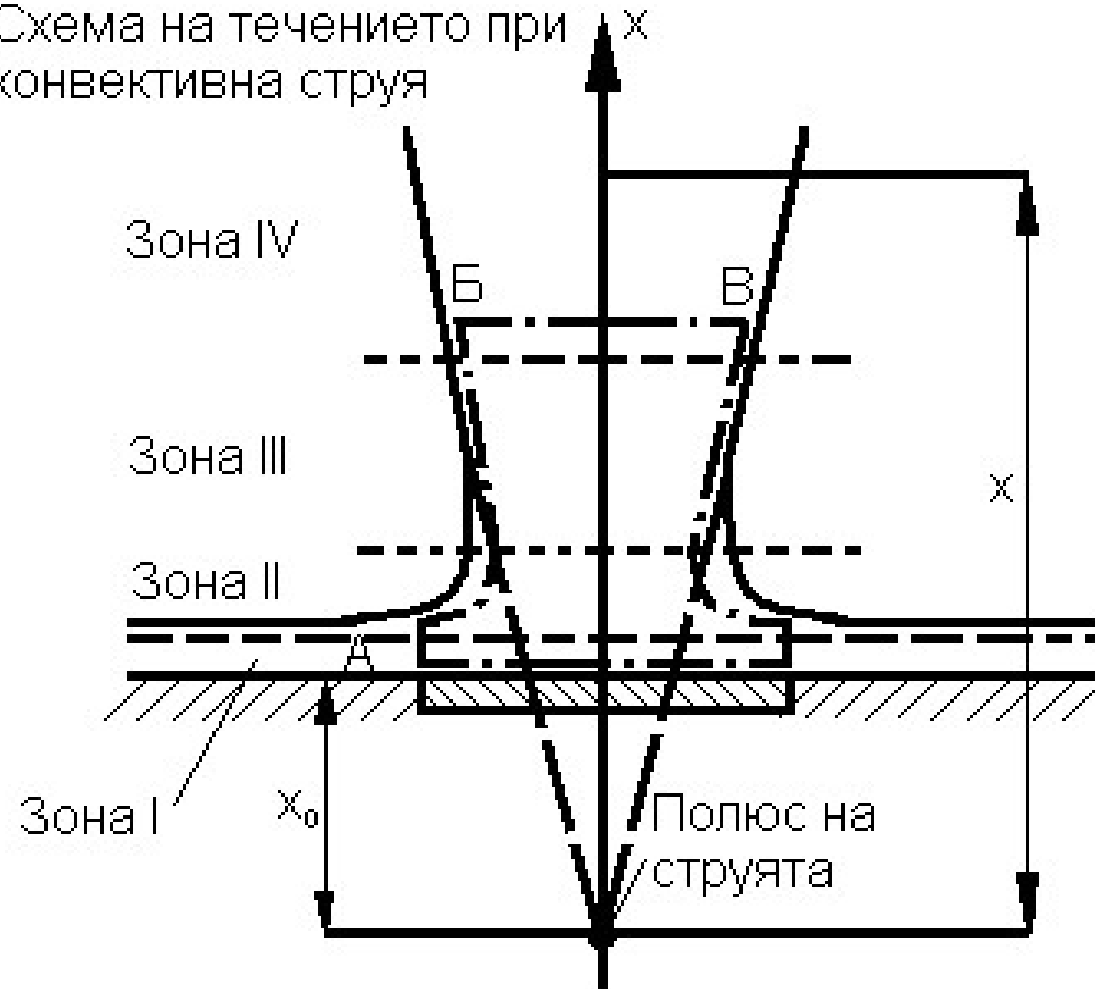
Фиг.5.3 б



Фиг. 5.3 в

Конвективните турбулентни струи представляват един от възможните варианти на струите с положителна подемна сила. Те възникват над източници на топлина вследствие на разликата в плътностите на нагретия от повърхността въздух и на околната среда. Съгласно фиг.5.4 по [3] течението на конвективната струя се разделя на следните зони: В първата зона въздухът протича хоризонтално в радиално направление непосредствено по повърхността. От нагрялата повърхност въздухът се загрева или както образно е определено в [3], "изплува". Определящи в тази зона са числата на Грасхоф и Прандтл, като Gr се определя по $Gr = (g\Delta T_n D_o^3) / (T_{ok} \nu^2)$; ΔT_n е температурна разлика между плочата и околната среда, D_o - характерен размер на нагрялата плоча. Във втората зона под действието на подемната сила скоростта на течението нараства, а посоката ѝ се обръща във вертикално направление. В третата зона се наблюдава трансформация на скоростното и температурното поле към автомоделно. В последната четвърта зона скоростните и температурните профили са вече автомоделни, аналогични с обичайните при струйните течения.

Схема на течението при конвективна струя



Фиг. 5.4

Конвективната струя може да бъде решена, като се използват получените по-горе зависимости за вертикална неизотермична струя с положителна подемна сила. Допълнително е необходимо да се запише условието за постоянство на топлосъдържанието над нивото на околната среда:

$$Q = Q_o$$

$$5.25. \quad Q = 2 \int_0^b c_p \rho (T - T_{ok}) u (\pi y)^j dy = c_p \rho_o (T_o - T_{ok}) u_o \left(\frac{\pi}{4} \right)^j d_o^{j+1}$$

Замествайки Q с неговото равно съгласно (5.25) в изразите за $\overline{u_m}$ и $\overline{\Delta T_m}$ (респ. за $\overline{c_m}$), се получава:

$$5.26. \quad u_m = B_u \left\{ \frac{g}{[c_p \rho_{ok} T_{ok} (\pi/4)^j]} \right\}^{1/3} x^{-j/3} Q^{1/3}$$

$$5.27. \quad \Delta T_m = B_c \left\{ \frac{T_{ok}}{[c_p \rho_{ok} c_{b2} (\pi/4)^{2j}]} \right\}^{1/3} x^{-(2j/3+1)} Q^{2/3},$$

където c_{b2} - коеф. на разширение на струята.

Горните зависимости са валидни в четвъртата автомоделна зона от течението, където то е напълно турбулизирано. Съгласно приведени в [3] данни това се реализира при $Gr.Pr \geq 10^6$.

Ако се приеме, че разполагаемото топлосъдържание е приблизително равно на отделеното от нагрятата повърхност, то $Q \sim D_o^2 \Delta T_n^{4/3}$, където D_o е характерен размер на нагрятата повърхност.

След заместване в (5.26-5.27) се получават зависимостите:

$$5.28. u_m = B_{\ddot{u}} D_o^{1/3} \Delta T_n^{4/9} (x/D_o)^{-1/3}$$

$$5.29. \Delta T_m = B_{\ddot{\Delta T}} D_o^{-1/3} \Delta T_n^{8/9} (x/D_o)^{-5/3}$$

Стойностите на коефициентите $B_{\ddot{u}}''$ и $B_{\ddot{\Delta T}}''$ за някои типични случаи са дадени в табл.5.2.

Таблица 5.2

	за пластина, поставена върху повърхност	над пластина, сложена върху поставка
$B_{\ddot{u}}, [m^{1/3} K^{9/4}]$	0,136	0,222
$B_{\ddot{\Delta T}}, [m^{1/3} K^{9/4}]$	0,55	0,71

От получените изрази за u_m и ΔT_m следват изводите:

- затихването им е пропорционално съответно на $\Delta T_n^{4/9}$ и на $\Delta T_n^{8/9}$, т.е. максималната скорост намалява значително по-бързо в сравнение с температурната разлика.
- Изменението на u_m и ΔT_m зависи от размера на източника, създаващ конвективната струя. При по-малък източник на топлина ($D_{01} < D_{02}$) температурната разлика ΔT_{m1} ще бъде с $\left(\frac{D_{02}}{D_{01}}\right)^{1/3}$ пъти по-голяма

($\Delta T_{m1} = \left(\frac{D_{02}}{D_{01}}\right)^{1/3} \Delta T_{m2}$); докато скоростта ще е толкова пъти по-малка.

Вертикална струя с отрицателна подъемна сила (фиг.5.16).

В случая, когато посоката на течението не съвпада с посоката на подъемната сила, се наблюдават вертикални струи с отрицателна подъемна сила. Вследствие на това несъвпадение отрицателната подъемна сила действа в противоположна посока на инерционните сили на струята, което в даден момент води до обръщане на посоката на течението. Подобни струйни течения възникват при изтичане на по-хладна струя вертикално нагоре в среда с по-висока температура или обратно – разпространение на загрята струя, насочена надолу в по-хладна среда. Няма да се спираме на широкото практическо приложение на подобни течения в инженерната практика, тъй като това е обект на специалните дисциплини.

Интегралните условия за количеството на движение и масосъдържанието съгласно [3] имат вида:

$$5.30. \frac{d}{dx} \int_0^b \rho u^2 y dy = -g \int_0^b (\rho - \rho_{ok}) y dy$$

$$5.31. \frac{d}{dx} \int_0^b u (\rho - \rho_{ok}) y dy = 0$$

За разширението на струйния граничен слой се приема приблизителната зависимост

$$5.32. b = c_b x$$

Тя може да се замени с интегралното условие за енергията, но това усложнява аналитичното решение, като в този случай то може да се реализира само числено.

След решаване на интегралите и съответно преобразуване на 5.30-5.31, като се има предвид възприетото разширение на струята по (5.32), се получава:

$$5.33. -g A_2 \Delta \rho_m b^2 = c_b \frac{d}{db} (A_4 \Delta \rho_m u_m^2 b^2 + \rho_{ok} A_1 u_m^2 b^2)$$

$$5.34. \Delta \rho_m = (2 A_3 u_m b)^{-1},$$

където интегралите A_1 , A_2 и A_3 се дават с (5.20), а A_4 се определя по

$$5.35. A_4 = \int_0^1 \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_m} \right) \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 \frac{y}{b} \frac{dy}{b}$$

Съвместното решение на (5.33) и (5.34) води до следната зависимост относно максималната скорост:

$$5.36. \frac{d\bar{u}_m}{d\bar{b}} = \left[\frac{A_2}{4c_b A_3} - 2A_1 n \bar{b} \bar{u}_m \right] / \left\{ \bar{u}_m \left[\frac{A_4}{2A_3} (1-n) + 2A_1 n \right] \bar{b}^2 \bar{u}_m \right\}$$

Полученото уравнение може да се реши само числено. В [3] се дава приблизително решение за случая $n \neq 1$, $Ar_o \leq 10^{-3}$ чрез представяне на максималната скорост в ред на Тейлор при параметър числото на Архимед $\psi = Ar_o$. Запазват се само първите два члена от реда: $\bar{u}_m = \bar{u}_{m1} + \psi \bar{u}_{m2}$. След съответна преработка и въвеждане на допълнителни опростявания се получава следният израз за затихване на максималната скорост на струята:

$$5.37. \bar{u}_m = \left[b(2nA_1)^{1/2} \right]^{-1} + \frac{A_2 b}{8c_b A_3} Ar_o$$

Като се използва връзката между максималните разлики на температурата и плътността $\Delta T = \Delta \rho_m / n$, след заместване в (5.34) се получава

$$5.38. \Delta T_m = \left(2A_3 n \bar{u}_m \bar{b}^2 \right)^{-1}$$

Ако за коефициента на пропорционалност се приеме $c_b = 0,22$ (5.32), за затихването на максималната скорост и максималната температурна разлика от (5.37) и (5.38) следва:

$$5.39. \bar{u}_m = \frac{12,4}{xn^{1/2}} + 0,3 Ar_o \bar{x}$$

$$5.40. \Delta T_m = \frac{1,43 \cdot 10^2}{nu_m \bar{x}}, \quad \text{където: } \bar{u}_m = u_m / u_o, \quad \Delta \bar{T}_m = \Delta T_m / \Delta T_o$$

Важна характеристика на вертикалната струя с отрицателна подемна сила е нейната далекобойност, респ. максималната височина, на която тя се издига, или дълбочина, на която прониква в дадена по-плътна среда. Този параметър x_m може да се определи, като се приеме, че това е отстоянието от началото, за което максималната осева скорост е равна на нула - $u_m = 0$. При това полагане от (5.37) се получава

$$5.41. \bar{L} = \left[\frac{8A_3}{\left(c_b A_2 Ar_o (n \cdot 2A_4)^{1/2} \right)} \right]^{1/2}, \text{ където } \bar{L} = x_m / r_o. \text{ Ако се използва (5.39), при приетото } c_b = 0,22 \text{ се получава}$$

$$5.42. L = \frac{6,5}{\sqrt{Ar_o n^{1/2}}}$$

По опитни данни в [41] и [57], приведени в [3], далекобойността на струя от нагрят въздух и фреон, определена като сечение с нулева концентрация на фреон ($c_m = 0$), се представя с емпиричната зависимост

$$5.43. L = \frac{4,4}{\sqrt{|Ar| n^{1/2}}}$$

Тази разлика в двете зависимости се обяснява с относително голямата дължина на зоната, в която става обръщане на течението. По всяка вероятност значително по-голяма точност би се получила, ако задачата се решава числено, без съответните опростявания на аналитичното решение.

У нас въпросът за численото изследване на разпространението на вертикални неизотермични турбулентни струи с положителна и отрицателна подемна сила е решен много успешно в [15]. Приблизително моделиране със съответни числени решения е дадено в [33, 34].