

Проф. инж. ВЕНЦЕСЛАВ Х. МАДЖИРСКИ

МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

ИЗДАТЕЛСТВО „ТЕХНИКА“
СОФИЯ, 1991

$$N = q (V_{2u} U_2 - V_{1u} U_1). \quad (5.60)$$

Тази мощност, отнесена за единица флуидна маса, дефинира специфичната енергия H , която лопатъчното колело на турбомашината отдава на протичащия през него флуид:

$$H = \frac{N}{q} = V_{2u} U_2 - V_{1u} U_1. \quad (5.61)$$

Отдаваната на флуида специфична енергия H може да се определи и с уравнението на Бернули

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + H = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2,$$

което в съответствие с уравни. (5.61) може да се запише още така

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + V_{2u} U_2 - V_{1u} U_1 = 0.$$

От скоростните триъгълници на фиг. (5.35) следват съотношенията:

$$V_1^2 = U_1^2 + W_1^2 - 2U_1 W_1 \cos \alpha_1,$$

$$V_2^2 = U_2^2 + W_2^2 - 2U_2 W_2 \cos \alpha_2,$$

$$V_{1u} = U_1 - W_1 \cos \alpha_1,$$

$$V_{2u} = U_2 - W_2 \cos \alpha_2.$$

След заместване на тези тригонометрични зависимости в модифицираното по-горе уравнение на Бернули скончателно се получава

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} \quad (5.62)$$

или при пренебрегване на разликата в геодезичните височини на крайните сечения на колелото

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}. \quad (5.63)$$

Получените уравнения (5.59)÷(5.63) са известни като уравне-

ния на Ойлер и написани в този вид са валидни за работните турбомашини. Те са приложими и за силовите турбомашини, в течението е насочено радиално от периферията навътре в колелото, крайните напречни сечения сменят местата си и уравненията от (5.40) до (5.63) променят знаците си. Трябва да се подчертае, че тези уравнения са основни в теорията на турбомашините и се наричат *турбинни уравнения на Ойлер*.

VI. РАВНИННИ ПОТЕНЦИАЛНИ ТЕЧЕНИЯ

6.1. КОМПЛЕКСЕН ПОТЕНЦИАЛ

Сравнително най-простият и най-добре изученият вид установени безвихрови движения на идеалните флуиди са т. нар. *равнинни потенциални течения*. Те се характеризират с движение на флуидните частици по успоредни равнини, по които течението е едно и също. Следователно по нормалите към тези равнини параметрите на течението (скорост, налягане, плътност и др.) не се менят. Това дава основание равнинните течения да се разглеждат само в една от успоредните равнини, например равнината xOy , към която оста z е нормална. Тогава, приемайки, че параметрите на течението са функция само на координатите x и y , $v(x, y)$ се изразяват посредством скоростния потенциал $\phi(x, y)$, както следва:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6.1 \text{ а})$$

и съответно $\vec{V} = \text{grad } \phi$.

В този случай уравнението $\phi(x, y) = \text{const}$ ще бъде уравнение на *еквипотенциалните линии* в равнината xOy . (6.1 б)

Токова функция. При двумерните равнинни течения се оказва възможно въвеждането на още една функция, която притежава аналогични на потенциала свойства. От уравнението за непрекъснатостта на равнинно течение на несвиваем флуид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.2)$$

следва, че винаги може да се намери някаква непрекъсната функция $\psi(x, y)$, определена така, че

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.3)$$

което тъждествено да удовлетворява уравн. (6.2), тъй като

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (6.4)$$

Може да се покаже, че уравнението на токовата линия $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ представлява пълният диференциал на функцията $\psi(x, y)$, т. е.

$$u dy - v dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0$$

$$\text{или} \quad \psi(x, y) = \text{const}. \quad (6.5)$$

Очевидно функцията $\psi(x, y)$ запазва постоянна стойност по дължина на токовите линии, поради което е наречена токова функция и следователно $\psi(x, y) = \text{const}$ е уравнението на токовите линии.

От условието за безвихрово течение

$$\text{rot } V = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

се получава

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi = 0,$$

което показва, че токовата функция удовлетворява уравнението на Лаплас, т. е. тя е също хармонична функция, както и потенциалната.

Физичният смисъл на функцията $\psi(x, y)$ се изяснява от следното разглеждане върху флуиден слой с височина $z=1$, измерена по перпендикуляра към равнината на течението (фиг. 6.1). Обемният дебит през лицевия елемент df с дължина dl (височината dz е единица) е

$$dQ = V_n dl.$$

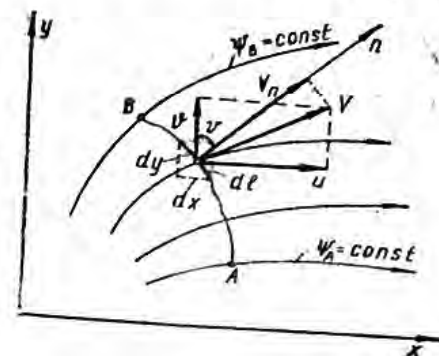
В случая нормалната компонента на скоростта се определя, както следва:

$$V_n = u \cos \theta + v \sin \theta.$$

Каго се вземат под внимание тригонометричните зависимости

$$\cos \theta = \frac{dy}{dl}, \quad \sin \theta = -\frac{dx}{dl},$$

за дебита се получава ~~$dQ = u dx - v dy$~~ $dQ = u dy - v dx$



Фиг. 6.1

а в съответствие с уравн. (6.3)

$$dQ = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi. \quad (6.6)$$

Следователно диференциалът на токовата функция е равен на дебита през елементарния лицев елемент df . За дебита на течението в токовия канал, ограничен от токовите повърхнини ψ_A и ψ_B (отнесен за единица височина на течението), следва изразът

$$Q = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A, \quad (6.7)$$

където ψ_B и ψ_A са стойностите на токовата функция в крайните точки на контура. Следователно обемният дебит на течението през произволен контур между две токови линии (повърхнини) се определя само от стойностите на токовата функция по тези линии и не зависи от формата на контура. Ако началната и край-

ната точка на този контур лежат на една и съща токова линия, дебитът през такъв контур е равен на нула (тъй като $\psi_A = \psi_B$), което показва, че токовете повърхнини не пропускат флуид.

Скоростният потенциал $\varphi(x, y)$ и токовата функция $\psi(x, y)$ се наричат характеристични функции на течението. Характерно за тях е това, че докато потенциалната функция съществува само за безвихрови течения, токовата функция може да се въведе винаги, стига само течението да е двумерно.

Комплексен потенциал. Като се съпоставят изразите (6.1) и (6.3), се получава системата уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.8)$$

Равенствата (6.8) представляват известните условия на Коши-Риман, които определят съществуването на някаква аналитична функция на комплексната променлива $F(z)$ от вида

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Аналитичната функция $F(z)$ съдържа както потенциалната $\varphi(x, y)$, така и токовата функция $\psi(x, y)$ на течението, поради което се нарича комплексен потенциал или характеристична функция на равнинните безвихрови течения.

Тъй като комплексният потенциал $F(z)$ се определя само от положението на точката z , очевидно и производната ѝ ще се определя от положението на тази точка и няма да зависи от посоката на диференциране. Следователно

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{dF(z)}{dx} = \frac{dF(z)}{d(iy)}$$

или

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv = \bar{V}. \quad (6.9)$$

Абсолютната скорост V в комплексната равнина (фиг. 6.2) се определя от израз

$$V = u + iv.$$

Вижда се, че производната на комплексния потенциал по комплексната променлива z е равна на огледалния образ на скоростния вектор спрямо реалната ос x и се нарича *имагинерно спрегнатата скорост* $\bar{V}$. Съгласно с фиг. 5.2 за компонентите на скоростта могат да се напишат зависимостите

$$u = V \cos \theta, \quad v = V \sin \theta,$$

откъдето за скоростта се получава

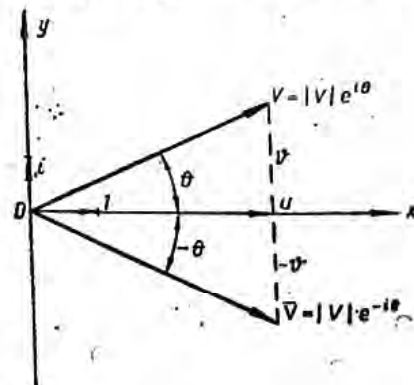
$$V = |V|(\cos \theta + i \sin \theta) = |V| e^{i\theta}$$

и съответно за имагинерно спрегнатата скорост

$$\bar{V} = |V|(\cos \theta - i \sin \theta) = |V| e^{-i\theta}. \quad (6.10)$$

При равнинните потенциални течения е възможно функциите $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ да разменят мястото си, като $\varphi(x, y)$ стане токова функция, а $\psi(x, y)$ — потенциална. Очевидно такава размяна ще дефинира течение, което е завъртяно на ъгъл $\pm \frac{\pi}{2}$ спрямо първото, като неговият комплексен потенциал може да се получи от $F(z)$ чрез умножаване с $\pm i$, т. е. $F_1(z) = \pm iF(z) = \pm i\varphi \mp \psi = \varphi_1 + i\psi_1$, тъй че $\varphi_1 = \mp \psi$ и $\psi_1 = \pm \varphi$.

Използването на теорията на аналитичните функции на комплексната променлива $z = x + iy$ облекчава значително изучаването на равнинните безвихрови течения. При това всяко равнинно течение може да бъде представено с някакъв комплексен потенциал и обратно — на определен вид комплексен потенциал съответствува някакво равнинно течение. Оттук следват два вида задачи: 1) по познат контур на обтеченото тяло и скоростта в безкрайно отдалечените точки от него да се намери съответният комплексен потенциал и 2) по зададен комплексен потенциал да се изучи движението, т. е. да се намерят функциите $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, а следователно и скоростното поле. Втората задача е сравнително по-лесна и е разглеждана в някои от следващите характерни примери от хидродинамиката на комплексния потенциал.



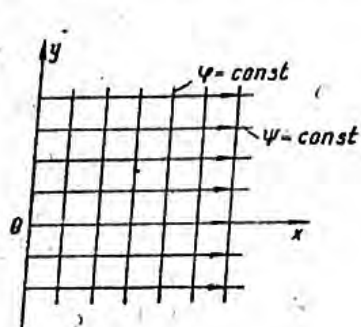
Фиг. 6.2

6.2. ПРИМЕРИ НА РАВНИННИ ПОТЕНЦИАЛНИ ТЕЧЕНИЯ

Успоредно потенциално течение. Комплексният потенциал на успоредното потенциално течение е от вида

$$F(z) = kz = k(x + iy). \quad (6.11)$$

При това са възможни случаите: $k=a$, където a е реално число; $k=ib$ — имагинерно число, докато b е реално число и третият случай $k=a+ib$ е комплексно число, като a и b са реални числа.



Фиг. 6.3

а. Ако $k=a$ е реално число, от уравни. (6.11) се получава

$$F(z) = az = ax + iay.$$

Следователно $\phi = ax$ и $\psi = ay$, откъдето екипотенциалните линии $\phi = ax = \text{const}$ са семейство прави линии, успоредни на имагинерната ос y , а токовите линии $\psi = ay = \text{const}$ ще бъдат семейство прави линии, успоредни на реалната ос x (фиг. 6.3).

За скоростните компоненти на уравни. (6.1) се получава

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.$$

При $a > 0$ посоката на течението ще съвпадне с направлението на ос x . В случая $u=a=V_0$ и комплексният потенциал за успоредното течение може да се запише във вида

$$F(z) = V_0 z, \quad (6.12)$$

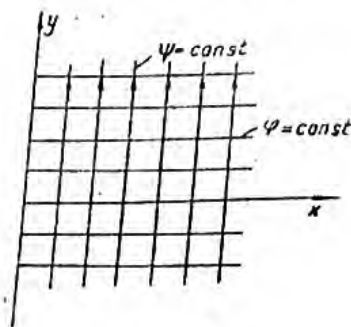
където V_0 е скоростта на успоредното течение.

б. В случай че $k=-ib$ е имагинерно число, като b е реално число, за комплексния потенциал се получава

$$F(z) = -ibz = -ibx + by \quad (6.13)$$

и следователно $\phi = by$ и $\psi = -bx$.

Тогав екипотенциалните линии $\phi = by = \text{const}$ са семейства



Фиг. 6.4

прави линии, успоредни на ос x , а токовите линии $\psi = -bx = \text{const}$ са прави, успоредни на ос y (фиг. 6.4).

Скоростните компоненти се определят по аналогичен начин

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = b.$$

При $b > 0$ посоката на течението ще съвпадне с направлението на имагинерната ос y .

В случая второто течение е идентично на първото, но завъртяно спрямо него на ъгъл $\pi/2$, като комплексният му потенциал е получен от този на първия чрез умножаване с числото $-i$. Нека $k=a+ib$ е комплексно число, където a и b са реални числа. Тогав комплексният потенциал приема вида

$$F(z) = (a+ib)z = ax + iay - bx + by$$

или

$$F(z) = ax + by + i(ay - bx), \quad (6.14)$$

където $\phi = ax + by$ и $\psi = ay - bx$ са съответно потенциалната и токовата функция. Скоростните компоненти се определят, както следва:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a \quad \text{и} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = b.$$

За $a > 0$ и $b > 0$ направлението на течението е определено с ъгъл $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ (фиг. 6.5), като

$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Уравненията на екипотенциалните и токовите повърхнини (линии) са съответно

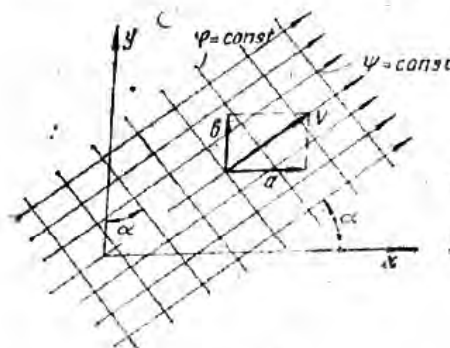
$$\phi = ax + by = \text{const} \quad \text{или} \quad y = \text{const} - \frac{a}{b}x$$

$$\text{и} \quad \psi = ay - bx = \text{const} \quad \text{или} \quad y = \text{const} + \frac{b}{a}x.$$

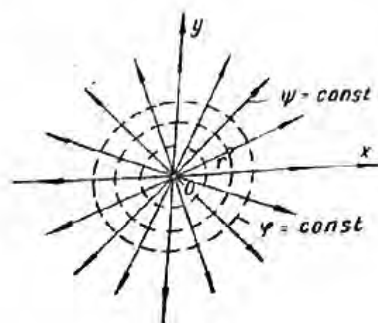
Получените равенства представляват уравненията на взаимно перпендикулярни прави, наклонени спрямо осите x и y съответно на ъгъл $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$.

Линеен източник и падина. Един друг вид равнинно потенциално течение се получава, ако комплексният потенциал е от вида

$$F(z) = a \ln z, \quad (6.15)$$



Фиг. 6.5



Фиг. 6.6

където a е реално число.

Като се изрази комплексната променлива z в полярни координати $z = re^{i\theta}$ (r е модул, а θ амплитуда), се получава

$$F(z) = a \ln re^{i\theta} = a \ln r + ia \theta. \quad (6.16)$$

Тогава $\phi = a \ln r$ и $\psi = a \theta$.

Еквипотенциалните и токовите линии, респ. повърхнини, определени с уравненията

$$\phi = a \ln r = \text{const} \quad \text{или} \quad r = \text{const}$$

и

$$\psi = a \theta = \text{const} \quad \text{или} \quad \theta = \text{const},$$

представяват съответно семейство концентрични окръжности (еквипотенциални повърхнини) с център в началото на координатната система, а токовите линии — семейство прави (токовите повърхнини — семейство равнини), преминаващи през началото на координатната система (фиг. 6.6).

За компонентите на скоростта се получава

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{a}{r} \quad \text{и} \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0.$$

Ако $a > 0$, скоростта $V_r = V$ има радиално направление и картината на токовите линии ще изобразява течението на т. нар. ли-

неен (равнинен) източник (фиг. 6.6). Всъщност линейният източник е права, нормална спрямо равнината, която излъчва перпендикулярно на себе си флуид равномерно във всички радиални направления. При $a < 0$ картината от токовите линии изобразява течението на т. нар. линейна (равнинна) падина, при която скоростта на течението е насочена от всички страни нормално към центъра на координатната система.

Характерно за източника и падината е наличието на особена точка $r=0$, в която скоростта е безкрайно голяма.

Обемният дебит на източника и падината, излъчван от единица дължина, се определя по израза

$$Q = \int_0^{2\pi} V_r r d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a,$$

откъдето $a = Q/2\pi$ и следователно

$$F(z) = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (6.17)$$

и

$$\phi = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{и} \quad \psi = \pm \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Потенциален вихър Ако комплексният потенциал на източника (6.15) се умножи с i , се получава

$$F(z) = ia \ln z \quad (6.18)$$

или

$$F(z) = ia \ln re^{i\theta} = -a \theta + ia \ln r,$$

следователно $\phi = -a \theta$ и $\psi = a \ln r$,

а уравненията на токовите и еквипотенциалните линии (повърхнини) са

$$\psi = a \ln r = \text{const} \quad \text{и} \quad \phi = -a \theta = \text{const},$$

което представлява съответно семейство концентрични окръжности с център координатното начало и семейство прави, преминаващи през същото начало (фиг. 6.7). В случая е налице циркуляционно течение спрямо изолиран точков вихър или по-точно казано, на вихрова нишка, която съвпада с оста z .

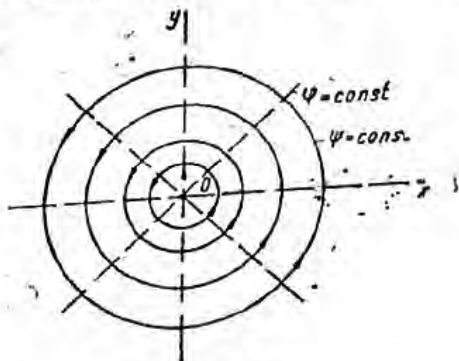
Скоростните компоненти на разглежданото циркуляционно течение са

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{a}{r}.$$

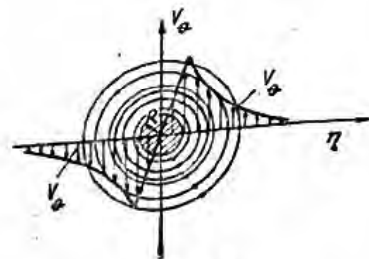
откъдето за циркуляцията по произволно затворена токова линия (в случая затворен контур) се получава

$$\Gamma = \oint V_{\theta} ds = - \oint \frac{a}{r} r d\theta = -2\pi a.$$

Вижда се, че числото a приема определена стойност $a = -\Gamma/2\pi$



Фиг. 6.7



Фиг. 6.8

и следователно комплексният потенциал на циркуляционното течение с циркуляция Γ приема вида

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (6.19)$$

Така че $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ и $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$, а скоростната компонента е

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (6.20 a)$$

откъдето следва

$$V_{\theta} r = \frac{\Gamma}{2\pi} = V_{\theta} r = \text{const.} \quad (6.20 b)$$

Характерно за разглежданото течение е това, че всички флуидни частици се движат по концентрични окръжности с постоянна за дадената окръжност скорост. Такова движение е циркуляционно безвихрово движение. Строго казано, то е безвихрово навсякъде освен в осрената точка (точковия вихър, респ. вихрова нишка), в началото на координатната система, поради което

се нарича още потенциален вихър. Доколкото произволната токова линия (токова повърхнина) може да се приеме за твърда граница, като се вземе в качеството на токова граница например окръжност с радиус $r=R$ и се разглежда течението вън от тази окръжност, се получава чисто циркуляционно обтичане на безкрайно дълъг кръгов цилиндър с радиус R . Съответното разпределение на скоростта в областта вън от цилиндъра е показано на фиг. 6.8; направлението на скоростите се определя от знака на циркуляцията. Приема се $\Gamma > 0$ в случая, когато въртенето на течността е в обратна посока на часовниковата стрелка.

Следователно течението, характеризиращо се с потенциала $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$, определя чисто циркуляционно обтичане на кръгов цилиндър.

6.3. КОМБИНИРАНИ РАВНИННИ ПОТЕНЦИАЛНИ ТЕЧЕНИЯ

Важно свойство на токовата и потенциалната функция е това, че ако са известни тези функции за две или повече течения ($\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$; $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$), тяхната сума определя ново потенциално течение с комплексен потенциал:

$$F(z) = (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n) + i(\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n)$$

$$\text{или} \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_n(z). \quad (6.21)$$

Това свойство следва непосредствено от линейността на Лапласовото уравнение, което е удовлетворено от разглежданите съставни потенциални и токови функции.

Обикновено комбинирането на равнинни потенциални течения довежда до формиране на по-сложни течения, срещани при това често в практическите задачи.

Дипол. Едно от често използваните елементарни течения се получава при комбинация на източник с дебит Q , разположен в началото на координатната система, и падина със същия дебит, разположена на разстояние Δx от него (фиг. 6.9).

Комплексният потенциал на сумарното течение според уравн. (6.21) е

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} (\ln z - \ln z'). \quad (6.22)$$

Ако разстоянието Δx започне да се стреми към нула, като дебитът Q запази постоянна стойност, падината ще поглъща излъчвания дебит от източника и равновесието няма да се наруши. Съществен интерес представлява обаче комбинацията, за която