

Проф. инж. ВЕНЦЕСЛАВ Х. МАДЖИРСКИ

МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

ИЗДАТЕЛСТВО „ТЕХНИКА“
СОФИЯ, 1991

$$\overline{V_c} = \frac{V_{0c} R}{\sqrt{1 + R^2}} = \frac{V_{0c}}{\sqrt{1 + 1}} = \infty.$$

Следователно скоростта там е безкрайно голяма с направление по оста ξ . Тъй като обтичането на ръбовете с безкрайно голяма скорост при реалните флуиди е физически невъзможно, течението непосредствено след тях е съпроводено с откъсване и вихрообразуване.

VII. ДИНАМИКА НА РЕАЛНИТЕ ФЛУИДИ

За разлика от идеалните флуиди, в които действуват само масови и повърхостни сили на натиск, при движение на реалните флуиди се появяват и тангенциални сили, определени от вискозитета на флуида. Това обстоятелство налага динамиката на реалните флуиди да се занимава предимно с анализа на връзката между движението на флуидните частици и действащите върху тях сили и напрежения, включително и тези на вътрешно триене. Същевременно тя има за цел да изясни същността и характера на теченията на реалните флуиди и да даде зависимости за тяхното математично описание.

Изучаването на движението на реалните флуиди показва, че влиянието на вискозитета се изразява не само в появяване на тангенциални напрежения, но и в изменение на големината на нормалните напрежения в сравнение с тези на идеалните флуиди. Това обстоятелство усложнява много вида на диференциалните уравнения на Навие—Стокс за движението на реалните флуиди и създава понякога непреодолими трудности при тяхното интегриране. Ето защо в динамиката на реалните флуиди не винаги са възможни аналитични решения, поради което се използват и опитни резултати, вън основа на които се получават емпирични и полуемпирични зависимости.

7.1. ДИНАМИЧНО ПОДОБИЕ НА ФЛУИДНИТЕ ТЕЧЕНИЯ

В сегашното си състояние хидродинамиката все още не може да дава точни аналитични решения на теченията на реалните флуиди, особено на тези с по-сложни начални и гранични условия. В такива случаи най-често се прибегва или към приблизителни полуемпирични решения с въвеждане на опитни коефициенти, или към моделни изследвания при използване на теорията на дина-

мичното подобие. Разбира се, моделните изследвания се правят по различни поводи: за проверка и съпоставяне на теоретични резултати с действителността, за получаване на опитни коефициенти, необходими за полуемпиричните решения, или за определяне на хидродинамичните показатели и характеристики на елементи, машини и съоръжения, които не могат да се получат по теоретичен път, а познаването им е от съществено значение за тяхната работа в експлоатационни условия. Очевидно това чисто приложно значение на метода на моделиране далеч не изчерпва неговите предимства. Той се използва успешно също така и при теоретичното изучаване на сложни явления предимно в техния начален стадий, за който още не са познати аналитични решения на описващите ги закони или въобще няма математична постановка на задачата.

Смисълът на метода на моделиране се изразява главно в това, че по резултатите от опита върху модела може да се съди за явленията, които протичат в натурните условия при оригинала. В случая основателно възниква въпросът, какви трябва да са условията, при които се провежда опитът, така че получените резултати да бъдат пренесени успешно върху оригинала. Отговор на тези въпроси дават законите на механично подобие, чийто основоположник е Нютон, които сега са много добре изучени в механиката на флуидите.

Две явления са физически подобни (еднакви), ако в съответните моменти от време в съответните им точки от пространството отношенията на характеризиращите ги едноименни физични величини са постоянни. С други думи, величините в точките на едното явление могат в съответните моменти от време да се получат от едноименните им величини в съответните точки на другото явление чрез умножение с еднакви за всички точки множители, наречени коефициенти или мащаби на подобие. Това означава, че двете подобни физични явления се различават само по мащаба на величините и функциите, определящи техните количествени характеристики. Следователно еднаквостта на физичната природа на явленията е основен белег на механичното подобие.

За съществуване на механично подобие между две сравнявани течения е необходимо да бъдат задоволени следните условия.

1 Геометрично подобие—подобие на форма, размери или координати, което се изразява в еднаквост на отношенията между всички съответни размери и равенство на съответните ъгли. Ако l_i ($i=1, 2, \dots, n$) са дължините (размерите) от едната уредба (оригинала), а l'_i —съответните им дължини от другата уредба, наречена модел, необходимо е

$$\frac{l_i}{l'_i} = C_1 = \text{const.}$$

където C_l е коефициентът на геометрично подобие за дължина, който показва колко пъти първата уредба е линейно по-голяма ($C_l > 1$) или по-малка ($C_l < 1$) от втората.

За съответните елементарни или крайни сечения и обеми на оригинала и модела може да се запише

$$\frac{l_i}{l} = C_l^2, \quad \frac{V_i}{V} = C_l^3.$$

2. Кинематично подобие, изразено в подобие на теченията, респ. движенията. Две течения са кинематично подобни, ако в съответните моменти от време отношението на скоростите на всички съответни флуидни частици е еднакво, а траекториите на тяхното движение са геометрично подобни, или кинематичното подобие се изразява в пропорционалност и успоредност на скоростните вектори в съответните точки на разглежданите течения, т. е. в геометричното подобие на скоростните полета.

Ако V_i ($i=1, 2, \dots, n$) са скоростите в отделните точки на едното течение, а V_i' — скоростите в съответните точки на другото (моделното) течение, необходимо е

$$\frac{V_i}{V} = C_v = \text{const.}$$

където C_v е коефициентът на подобие за скоростите. В геометрично и кинематично подобните течения може да се внесат още коефициентите за ускорение C_a и време C_t , така че

$$\frac{a_i}{a} = C_a = \text{const.} \quad \frac{t_i}{t} = C_t = \text{const.}$$

В случая коефициентът C_t показва колко пъти явлението в първото течение протича по-бавно ($C_t > 1$) или по-бързо ($C_t < 1$) от това във второто.

При това всеки един от тези мащаби може да бъде изразен посредством който и да е друг мащаб за дължина

$$C_v = \frac{V}{V'} = \frac{l/l'}{t/t'} = \frac{C_l}{C_t}, \quad C_t = \frac{C_l}{C_v}, \quad C_a = \frac{C_v}{C_t} = \frac{C_l}{C_t^2}.$$

3. Динамично подобие, изразено в подобие на маси и сили. Две течения са динамично подобни, ако масите на съответните частици или елементарни обеми са в еднакво отношение и ако са равни отношенията на едноименните сили, които в определена степен влияят на движението на частиците. Следователно

динамичното подобие предполага еднаквост на плътностите, а също така пропорционалност и успоредност на едноименните сили вектори в съответните точки. Това от своя страна означава геометрично подобие на силовите полета, респ. на съответните силови многоъгълници.

Ако за съответните едноименни сили K_i , плътности ρ_i , маси m_i , налягания p_i и коефициенти на вискозитета — динамичен μ_i и кинематичен ν_i , се въведат съответните коефициенти, следва:

$$\frac{K_i}{K} = C_K = \text{const.}, \quad \frac{p_i}{p} = C_p = \text{const.}, \quad \frac{m_i}{m} = C_m = \text{const.},$$

$$\frac{\rho_i}{\rho} = C_\rho = \text{const.}, \quad \frac{\mu_i}{\mu} = C_\mu = \text{const.}, \quad \frac{\nu_i}{\nu} = C_\nu = \text{const.}$$

Когато μ или $\nu \neq \text{const.}$, трябва да се разглежда още и температурното подобие, тъй като те зависят от температурата.

Обикновено на движението на реалните флуиди оказват влияние масовите сили (най-често теглото), повърхностните сили на натиск и силите от вътрешно триене (вискозитетът). Ако в съответните точки на течението на оригинала и модела се наблюдава еднакво (постоянно) отношение на тези сили, подобие е пълно. В случай че това условие не е изпълнено, т. е. ако не всички едноименни сили се намират в постоянно отношение, подобие е частично. Когато не е възможно осъществяването дори и на частично подобие, се прибегва до т. нар. *условно подобие*, при което въз основа на резултатите от моделното изследване се съди за действителните условия не на основата на подобие между модела и оригинала, а на основата на общи закономерности за изменението на характерните явления в зависимост от избраните независими променливи. Тези закони могат да се изучат както по теоретичен път, така и чрез провеждане на системни опити.

На практика при частично подобие обикновено се определя една от силите в качеството на характерна за изучаваното течение и опитът се провежда така, че да се изключи влиянието на останалите като пренебрежимо малки. Също така трябва да се държи сметка, че при моделните изследвания често се нарушават граничните условия, което налага да се въвеждат съответните поправки относно границите на теченията, разработени с помощта на съществуващите теории.

Основна задача на теорията на хидродинамичното моделиране е осигуряването на подобие на явлението, респ. течението. Същността на моделирането се състои в това, че с намаления (а понякога увеличения) модел се създава хидродинамично явление (течение), подобно на това, което трябва да съществува при ори-

гнала. Освен това главното предимство на метода на моделиране е обобщаването на резултатите на единичния опит върху цял клас явления. Методът на моделиране осигурява сравнително рационална организация на изследване при значително намаляване на обема на експерименталната работа, на средствата и времето. Основните задачи на моделирането, от решаването на които зависи успехът на изследването, са определянето на най-важните от действащите в разглежданите течения сили и изборът на съответния критерий на частично подобие.

Хидродинамично моделиране. Критерии на подобие

За да могат резултатите от моделното изследване да се пренесат върху оригинала, т. е. да съществуват постоянни коефициенти на подобие, необходимо е течението в модела да е динамично подобно на това в оригинала. Условието за това се дават от т. нар. *моделни закони*. За техните изводи съществуват различни методи, най-строгий от които се основава на Навие—Стоксовите диференциални уравнения за движението на реалните флуиди. Те се характеризират с това, че в тях компонентите на повърхностните и масовите сили фигурират като отделни членове. Условието за динамично подобие се получава, като тези уравнения се запишат в безразмерен вид. За нагледност се разглежда само едно от диференциалните уравнения на Навие—Стокс (4.23), например уравнението в проекции по ос x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u. \quad (7.1)$$

За да се напише уравнението в безразмерен вид, необходимо е всички величини, които влизат в него, да се обезразмерят чрез съответни характерни величини, например за несмутеното течение далеч пред обтеченото тяло (V_0, ρ_0), а също така и с характерните величини на времето t_0 и линейния размер l_0 . Що се отнася до плътността ρ и земното ускорение g , те се приемат постоянни в областта на течението. Тогава $\bar{x} = \frac{x}{l_0}$, $\bar{y} = \frac{y}{l_0}$, $\bar{z} = \frac{z}{l_0}$ са безразмерни координати, $\bar{u} = \frac{u}{V_0}$, $\bar{v} = \frac{v}{V_0}$, $\bar{w} = \frac{w}{V_0}$ — безразмерни скорости, $\bar{X} = \frac{X}{g}$ — безразмерна масова сила, $\bar{p} = \frac{p}{\rho_0 g l_0}$ — безразмерно налягане и $\bar{t} = \frac{t}{t_0}$ — безразмерно време. Очевидни са равенствата $x = \bar{x} l_0$, $y = \bar{y} l_0$, $z = \bar{z} l_0$, $u = \bar{u} V_0$, $v = \bar{v} V_0$, $w = \bar{w} V_0$, $X = \bar{X} g$, $\rho = \rho_0$, $t = \bar{t} t_0$, които се заместват в (7.1) и се получава

$$\frac{V_0}{t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{l_0} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = g \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\rho_0}{l_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{V_0}{l_0^2} \Delta \bar{u}. \quad (7.2)$$

Направените замествания не изменят размерността на отделните членове, която сега се определя от коефициентите пред безразмерните променливи. Те имат размерност на ускорение и могат да се интерпретират като сили, отнесени за единица маса от флуида. В случая $\frac{V_0}{t_0}$ представлява *локалните инерционни сили*, $\frac{V_0^2}{l_0}$ — *конвективните инерционни сили*, $\frac{\rho_0}{\rho l_0}$ — *силите на натиск* (налягане), $\nu \frac{V_0}{l_0^2}$ — *силите на вътрешно триене* и g — *гравитационните масови сили*.

Уравнението (7.2) може да се приведе в безразмерен вид, ако отделните му членове се разделят на един от коефициентите, например $\frac{V_0^2}{l_0}$

$$\frac{l_0}{V_0 t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = g \frac{l_0}{V_0^2} \bar{X} - \frac{\rho_0}{\rho V_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{l_0 V_0} \Delta \bar{u}. \quad (7.3)$$

Както вече се каза, за динамично подобие на течения трябва да съществува равенство на безразмерните коефициенти и на безразмерните свободни членове в описващите ги уравнения, които се наричат *критерии на подобие*. От (7.3) следва, че критериите за подобие на флуидните течения са следните: $Sh = \frac{l_0}{V_0 t_0}$ — наречен *критерий (число) на Струхал*, който изразява отношението на конвективните към локалните инерционни сили и се има предвид само в неустановените течения; $\frac{g l_0}{V_0^2} = \frac{1}{Fr}$, респ. $Fr = \frac{V_0^2}{g l_0}$, *критерий на Фруд*, който изразяват отношението на инерционните към тегловните сили; $Eu = \frac{\rho_0}{\rho V_0^2}$ — *критерий на Ойлер*, който изразява отношението на силите от налягане и конвективните инерционни сили; $\frac{\nu}{l_0 V_0} = \frac{1}{Re}$, респ. $Re = \frac{l_0 V_0}{\nu}$ — *критерий на*

Рейнолдс, който изразява отношението на конвективните инерционни сили към силите от вътрешното триене.

Като се внесат тези критерии в уравн. (7.3), получава се безразмерното диференциално уравнение:

$$\text{Sh} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\text{Fr}} \bar{X} - \text{Eu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{u}. \quad (7.4)$$

Очевидно е, че за геометрично и динамично подобие на флуидните течения безразмерните диференциални уравнения на Навиер-Стокс за движение на реалните флуиди ще бъдат еднакви с еднакви начални гранични условия, ако критериите Sh, Fr, Eu и Re запазват стойностите си, т. е. за да стане течението в модела динамично подобно на оригиналното, необходимо е

$$\text{Sh}' = \text{Sh}, \quad \text{Fr}' = \text{Fr}, \quad \text{Eu}' = \text{Eu}, \quad \text{Re}' = \text{Re}.$$

Според теорията на подобие чрез умножаване или деление на критерии на подобие могат да се получат нови критерии. Такаъв е критерият на Хаген, който се получава от произведението на Eu и Re, т. е.

$$\text{Ha} = \frac{\rho_0}{\mu} \frac{V_0 l_0}{V_0} = \frac{\rho_0 l_0}{\mu V_0} \quad \text{или} \quad \text{Ha} = - \frac{l_0 dp/dl}{\mu V_0} \quad (7.5)$$

и изразява отношението на силите от налягане към силите на вътрешно триене. В уравн. (7.5) dp/dl представлява надлъжният градиент на течението. Броят на необходимите критерии обаче се запазва, тъй като производният критерий заменя единия от образувалите го.

Анализ на критериите на динамично подобие

За пълното хидродинамично моделиране е необходимо да се спазва пълно подобие на теченията, т. е. равенство на всички критерии. На практика обаче това е невъзможно и се използва приблизително (частично) моделиране, при което подобие се осигурява по критерий, който е най-характерен за даденото явление. Така например за стационарните процеси, респ. течения, числото на Струхал няма значение. За теченията без свободна повърхнина съществен е критерият на Рейнолдс, докато при хидро-

динамичното изпитване на турбомашините (турбини, помпи и др.) е необходимо равенство на числата Sh и Eu.

В най-общия случай за динамично подобие на установените течения на несвиваем реален флуид в условията на гравитационно силово поле е необходимо да се спазват само критериите на Рейнолдс и Фруд. Изборът на критериите при моделиране на теченията трябва да се прави много внимателно, като се обръща особено внимание на относителната важност на отделните сили във формирането на общата картина на течението.

Обикновено теченията на флуидите се извършват в условията на свободна повърхнина или без свободна повърхнина. Към теченията без свободна повърхнина се отнасят теченията в тръби и закрити канали, а също така и движението на тела в атмосферния въздух или в друга флуидна среда, запълваща големи (неограничени) пространства. Характерно за тези течения е това, че Архимедовата подемна сила винаги уравновесява теглото на флуидните частици, поради което тегловните сили не оказват влияние върху характера на течението — все едно флуидните частици се движат в условията на безтегловност. Това от своя страна показва възможността за пренебрегване на критерия на Фруд. Следователно две геометрично подобни установени течения на реален несвиваем флуид без свободна повърхнина са динамично подобни, ако са равни само числата на Рейнолдс, т. е.

$$\text{Re} = \text{Re}', \quad \frac{l_0 V_0}{\nu} = \frac{l'_0 V'_0}{\nu'}.$$

В случай на еднороден флуид в моделното и оригиналното течение, т. е. $\nu = \nu'$, условието на динамично подобие приема вида

$$l_0 V_0 = l'_0 V'_0.$$

откъдето следва

$$V'_0 = V_0 C_l.$$

Последният израз показва, че моделното течение е подобно на оригиналното, ако характерната скорост в него, а следователно и всички съответни скорости, са толкова пъти по-големи от тези в оригиналното течение, колкото пъти размерите на модела са намалени спрямо тези на оригинала.

За динамично подобие на течения по критерия на Рейнолдс сравнително лесно се определят мащабите на отделните величини — скорост, време, сила и др.

От условието $\text{Re} = \text{Re}'$, т. е. $\frac{V_0 l_0}{\nu} = \frac{V'_0 l'_0}{\nu'}$, следва

$$C_V = \frac{V_0}{V_0'} = \frac{v l_0}{v' l_0'} = \frac{C_r}{C_l}, \quad C_l = \frac{C_l}{C_V} = \frac{C_l^2}{C_r^2},$$

$$C_K = \frac{\tau}{\tau'} = \frac{\rho v l_0' dV/dy}{\rho' v' l_0' dV'/dy'} = C_p C_r C_V C_l = C_p C_V^2, \quad (7.6a)$$

ако $v = v'$ и $\rho = \rho'$, тогава

$$C_V = \frac{1}{C_l}, \quad C_l = C_r^2, \quad C_K = 1. \quad (7.6 б)$$

Обикновено при реализиране на динамично подобие в теченията без свободна повърхнина има два независими пътя. Избира се или геометричният мащаб C_l , или флуидът в моделната уредба, при условие, че този в оригиналната е познат. При втория начин след избора на флуида се определят коефициентите C_p и C_r и по (7.6) — коефициентите C_l , C_V , C_l , C_K , а въз основа на тях мащабите на всички останали величини.

При изучаването на флуидните течения Рейнолдсовото число може да се използва като мярка за съотношението на инерционните и вискозните сили. При големите стойности на Re влиянието на вискозните сили става пренебрежимо малко и следователно течението на реалния флуид се доближава по характер до това на идеалния, т. е. до потенциалното течение, с изключение на тясната област на течението край стената, т. нар. *граничен слой*. Когато Рейнолдсовите числа са малки, тогава инерционните сили стават пренебрежими спрямо силите от вътрешното триене. Следователно числото на Рейнолдс е и подходящ критерий за пренебрегване на вискозните или инерционните сили в Навие—Стоксовите диференциални уравнения, което е от съществено значение за тяхното интегриране.

При геометрично подобие на течения със свободна повърхнина за осигуряване на динамично подобие е необходимо равенство на критериите на Фруд и Рейнолдс. Спазването на $F'r = Fr$ довежда до зависимостта

$$\frac{V_0^2}{g l} = \frac{V_0'^2}{g' l'}, \quad C_V = \sqrt{C_g C_l}, \quad (7.7)$$

а спазването на $R'e = Re$ — до зависимостта

$$C_V = \frac{C_r}{C_l}.$$

Тъй като отношението на скоростите и в двата случая трябва да бъде еднакво при разглеждане на две течения на повърхност-

та на земята и ограничена географска ширина ($g = g'$ или $C_g = 1$) се получава

$$C_l = C_r^2. \quad (7.8)$$

Този израз дава връзката между мащабите на геометрично подобие и кинематичния вискозитет. Вижда се, че изборът на флуида на моделното течение, когато този в оригиналното е известен, определя геометричния мащаб. Обратно, при избран геометричен мащаб трябва по уравн. (7.8) да се определи вискозитетът на флуида в моделната уредба, т. е. да се определи с какъв флуид трябва да се провеждат моделните изследвания. Предвид на ограничения диапазон на кинематичния вискозитет на флуидите, срещани в природата и използвани в промишлеността, такъв подбор на флуида в моделното течение практически е неосъществим. Следователно моделирането на течения с едновременно задоволяване на критериите Fr и Re се оказва практически невъзможно. Затова в практиката обикновено се запазва неизменен кинематичният вискозитет, като се осъществява равенство на един от критериите на подобие, което е най-съществено за дадения случай.

В някои течения със свободна повърхнина действието на вискозните сили е малко в сравнение с това на гравитационните сили и следователно тяхното моделиране може да се извърши само при спазване на критерия на Фруд. Този критерий има особено значение при изучаване на движението на тела по повърхността на вода, вълнови движения на водата в моретата и океаните, при водосливи и водопади, теченията на реките и в открити канали и др. Например при плъзгане на плавателни съдове и летателни апарати по свободна водна повърхнина се образуват вълни, чието действие върху тялото създава преобладаващата част както на съпротивителната сила, така също и на другите сили и моменти. Критерият на Фруд се използва също така и при течения с големи скорости, които се наблюдават при вертикалните маневри на самолети и други летателни апарати.

Ако при моделиране на динамично подобни течения се спазва само критерият на Фруд, за коефициентите на по-характерните величини се получава

$$C_V = \frac{C_l}{C_l} = \sqrt{C_g C_l}, \quad C_l = \sqrt{\frac{C_l}{C_g}}, \quad (7.9 а)$$

$$C_K = \frac{G}{G'} = \frac{\rho g W}{\rho' g' W'} = C_p C_g C_l^2,$$

а за случаите $g = g'$ и $\rho = \rho'$ следва

$$C_V = \sqrt{C_I}, \quad C_t = \sqrt{C_I}, \quad C_K = C_I^2. \quad (7.95)$$

Понякога при моделиране на течения със свободна повърхнина по критерия на Фруд се прави корекция за влиянието на вискозитета. За тази цел се използват модели с различни геометрични мащаби, като резултатите за оригинала се получават посредством екстраполиране на резултатите от моделните изследвания. Тук често се срещат трудности при изясняване на вискозния ефект, който става по-силно изразен с намаляването на модела.

Обикновено теченията със свободна повърхнина, при моделирането на които се спазва числото на Фруд, са обект на корабната хидродинамика и земната хидравлика.

В много задачи на хидродинамиката (течения в тръби и канали, обтичане на тела и др.) скоростта и налягането в произволна точка на течението се определят еднозначно от Re . Следователно Eu в тези случаи не е критерий на подобие и неговата стойност напълно зависи от другите числа на подобие. Тази зависимост в най-общия случай може да се представи в безразмерния вид

$$Eu = f(Re, Fr, Sh), \quad (7.10)$$

който се нарича *критериално уравнение на течението* и има универсална валидност за геометрично подобни системи независимо от вида на флуида (но несвиваем нютонен флуид) и абсолютните стойности на участващите величини. В някои задачи стойността на специфичната енергия на налягане е зададена и не зависи еднозначно от динамичното налягане в произволните точки на течението. В такива течения Eu не зависи от другите критерии на подобие и неговото спазване е задължително. Това са теченията през турбомашините, при които скоростта в произволните точки зависи не толкова от Re , колкото от Eu .

Свиваемостта на флуидите, която при теченията с малки скорости се пренебрегва, оказва преобладаващо влияние по отношение на вискозните и гравитационните сили при теченията с големи скорости особено около и надзвукови. За свиваемите флуиди критерият Eu може да се представи посредством израза за местната звукова скорост $a^2 = k \frac{p}{\rho}$, както следва:

$$Eu = \frac{p_0}{\rho V_0^2} = \frac{k p_0}{k \rho V_0^2} = \frac{a^2}{k V_0^2} = \frac{1}{k Ma}. \quad (7.11)$$

Следователно при газовите течения се появяват два допълнителни критерия:

$$\text{критерий на Поасон } k = C_p / C_V \quad (7.12 \text{ а})$$

$$\text{и критерий на Мах } Ma = V/a. \quad (7.12 \text{ б})$$

Следователно за динамичното подобие на теченията на свиваемите флуиди е необходимо да се спазва равенството на критерията на Рейнолдс, Поасон и Мах.

Едновременно задоволяване на трите критерия обикновено е съпроводено с редица трудности. Установено е, че при една и съща температура динамично подобие по Re и Ma може да се реализира само ако скоростите на съпоставяните течения са еднакви, а плътността на флуида в течението на моделната уредка е толкова пъти по-голяма от тази на оригиналното течение, от колкото пъти геометричните размери на модела са по-малки.

При високите скорости обикновено влиянието на вискозитета може да се пренебрегне и тогава е достатъчно изпълнение на подобие само по числото на Мах.

Критерият на Струхал се използва при неустановените и периодично повтарящите се процеси, като откъсване на течението от обтечени стени, вълнови трептения, сложни движения на флуидните частици (постъпателно и въртливо), периодично повтарящо се движение на витлата на самолетите и хеликоптрите, витлата на осовите турбомашини, корабните витла и др. При всички тези случаи частичното подобие с отчитане на периодичност-вяните течения.

За неустановените течения и периодичните процеси моделирането по Re и Sh обикновено се осъществява посредством подбора на съответния мащаб на времето. От условието $Sh = Sh$ следва

$$\frac{l}{Vt} = \frac{l'}{V't'} \quad \text{или} \quad C_V = \frac{V}{V'} = \frac{l t'}{l' t} = \frac{C_t}{C_l},$$

а от условието $Re = Re$

$$\frac{Vl}{\nu} = \frac{V'l'}{\nu'} \quad \text{или} \quad C_V = \frac{C_\nu}{C_l} = \frac{C_\mu}{C_p C_l},$$

като след приравняване на съответните мащаби, за скоростта се получава

$$C_t = \frac{C_l^2}{C_\nu} = \frac{C_p C_l^2}{C_\mu}. \quad (7.13a)$$

При един и същи флуид в оригинала и модела, и една и съща температура $\nu = \nu'$ ($C_r = 1$), и следователно

$$C_t = C_r^2. \quad (7.13 \text{ б})$$

Когато числото на Струхал се използва при изследване (моделиране) на витла независимо от предназначението им, за характерна скорост се приема скоростта на несмутеното течение пред витлото, а за характерно време и дължина съответно t — времето за едно завъртане на витлото, и d — диаметърът на витлото. Тогава критерият на Струхал може да се запише

$$Sh = \frac{n_c d}{\nu} = \frac{1}{\lambda}, \quad (7.14)$$

където n_c е честотата на въртене на витлото, а λ — коефициентът на скоростта.

Всички основни коефициенти, характеризиращи работата на витлата, както например коефициентите на теглене, мощност и полезно действие (к. п. д.) са функция на числото Sh , респ. на коефициента на скоростта λ .

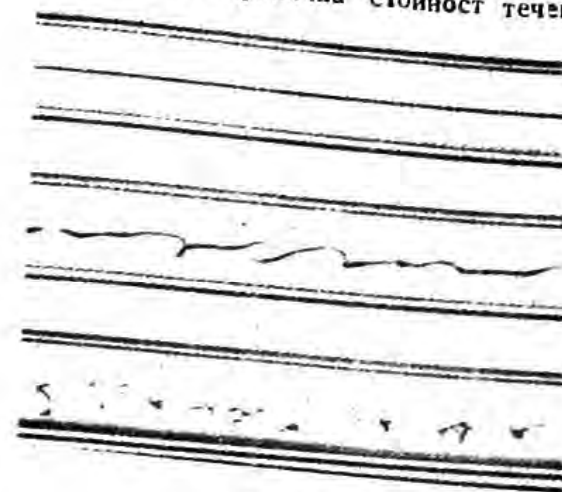
Критерият на Струхал има голямо значение за неустановените течения.

7.2. КЛАСИФИКАЦИЯ НА ТЕЧЕНИЯТА НА РЕАЛНИТЕ ФЛУИДИ

Както показва опитът, при движение на реалните флуиди в зависимост от относителната големина на инерционните и вискозните сили характерът на течението и разпределението на скоростта и налягането силно се различават. В механиката на флуидите това обстоятелство служи като основа на два основни принципа в класификацията на теченията на реалните флуиди и за тяхното аналитично изследване. Единият от тях се основава на разликата между ламинарните и турбулентните течения — дъта възможни режима на движение, другият — на разликата между пълзящите течения и течението в граничния слой, които са крайните случаи на изява на ефекта на вискозитета.

Ламинарни и турбулентни течения. Още Хаген (1839) и Поазбой (1818) са забелязали признаци за съществуването на два различни вида течения на реалните флуиди. Малко по-късно (1883) този въпрос е бил изяснен от Рейнолдс, който нагледно и убедително показва съществуването на тези два вида течения с помощта на оцветена токова нишка от течението в права прозрачна тръба. Той доказва, че при малки скорости оцветената токова нишка се вижда като права ивица, успоредна на стените на ця-

лата дължина на тръбата (фиг. 7.1 а) и че течението има симетричен слоест характер, поради което е наречено ламинарно (от гръцката дума lamina — слой). С увеличаване на скоростта до достигане на някаква гранична стойност течението запазва



Фиг. 7.1

слоестия си характер. При по-нататъшно увеличаване на скоростта оцветената нишка първоначално загубва праволинейния си характер, започва да пулсира и да се разпада на регулярни вихри сейва по цялото напречно сечение на течението, като не остава образна вихрова природа и се нарича турбулентно (бурно смутено, вихрово).

Ламинарните течения имат слоест характер. При тях отделните слоеве се движат относително един спрямо друг, защото скоростта по напречното сечение е различна. Движението на флуиди се извършва без макроскопично размесване на частиците (с изключение на молекулната дифузия) от различните слоеве. Тези течения са възможни, когато вискозните тангенциални напрежения и съответните им тангенциални сили, които са породени от молекулния обмен на количество на движение на отделните слоеве на флуида, оказват преобладаващо влияние върху течението.

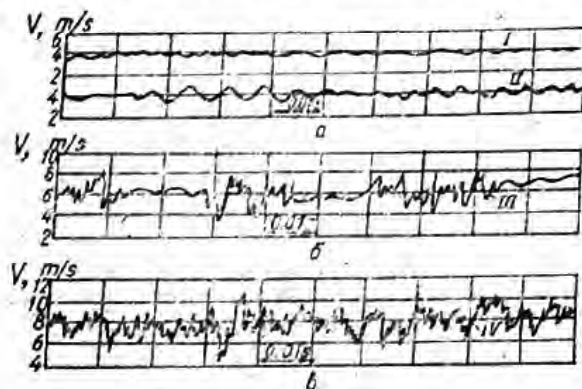
Турбулентните течения са неустановени, безпорядъчни, флукутиращи движения на реалните флуиди, характеризиращи се с хаотично макроскопично размесване на флуидните частици в напречно и надлъжно направление, което е съпроводено със съответни промени на тяхното количество на движение, обмен на импулси и следователно обмен на енергия. Тези течения са възмож-

ни, когато силите от вътрешното триене имат второстепенно значение в сравнение с инерционните и следователно не могат да възпрепятствуват стремежа на флуидните частици за хаотичното им движение и размесване.

Рейнолдс е установил, че нарушаването на слоестото течение и преминаването му в турбулентно се извършва винаги при една и съща стойност на отношението $\frac{dV}{\nu}$, наречено по-късно в негова чест критично число на Рейнолдс ($Re_{кр}$). Например за течение в права цилиндрична тръба този преход от ламинарно в турбулентно течение се наблюдава при достигане на $Re = \frac{dV}{\nu} = 2320$.

Разбира се, той се извършва постепенно, като между ламинарния и турбулентния режим на течението съществува преходен, характеризиращ се с висока степен на неустойчивост. На фиг. 7.2 е показано изменението на локалните скорости във функция на времето при параметър Re на течение в цилиндрична тръба. При малките стойности на Re практически не се наблюдават пулсации на скоростта (крива I фиг. 7.2a), като внасянето на краткотрайни смущения довежда до появяване на регулярни пулсации на скоростта, които бързо затихват (крива II (фиг. 7.2a)). При $Re=2000$ се наблюдават нерегулярни пулсации на скоростта, характерни за преходния режим (фиг. 7.2б). И при $Re>2500$ скоростта на течението има изразен нерегулярен пулсационен характер, дължащ се на интензивното взаимодействие на вихрите един с друг, типичен за турбулентното течение (фиг. 7.2в).

Преходът на ламинарно в турбулентно течение в права цилиндрична тръба в зависимост от началните условия (входящ учас-

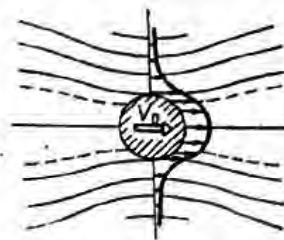


Фиг. 7.2

тък на тръбата, градивини на стените и др.) настъпва и при по-големи числа на Рейнолдс. Колкото смущенията при входа в тръбата са по-малки, толкова по-големи са стойностите на $Re_{кр}$, които понякога могат да достигнат до $Re_{кр}=40\,000$ и повече. Такива

ламинарни течения обаче са неустановени, защото при малко смущение, макар и краткотрайно, те преминават в турбулентни. Според $Re<2320$, теченията имат устойчив ламинарен характер, защото след премахване на смущенията теченията възстановяват ламинарния си характер. Ето защо стойността $Re_{кр}=2320$ се приема като граница на устойчивостта на ламинарните течения в прави сечения $Re_{кр}$ ще има по-различни стойности от тези на напречното им та в цилиндрични прави тръби. Числените стойности на $Re_{кр}$ зависят от геометрията на теченията, характерните дължини и скоростите, избрани за неговото определяне, а също така и от естеството на флуида, респ. от вискозитета му.

Плъзящи течения. Плъзящите течения се характеризират с много малки скорости на движение. Към тях могат да се отнесат обтичането на твърди тела при много бавното им движение във вода или други по-вискозни течности, обтичането на леки твърди частици или пращинки при подаването им във въздух, филтрационните движения на флуид (вода, нефт, газ и др.) през слой от дребнозърнеста среда от твърди частици или през пори в каменни, пясъчни и други земни пластове. Обикновено плъзящите течения се разглеждат като граничен случай на ламинарните течения, при които числото на Рейнолдс е много малко и в повечето случаи се приема равно на нула. Характерно за тях е това, че разпределението на скоростта и съотношението между градиента на налягането и масовите сили (предимно гравитационните) се определя само от предаването на тангенциалните напрежения от обтечените стени към вътрешността на течението. Следователно те се извършват в условията на сравнително големи вискозни сили, които влияят върху цялото поле на течението, респ. върху цялото пространство, заето от флуидната среда. Пример за плъзящо течение е показано на фиг. 7.3, която демонстрира бавно движение на сфера, паднала в силно вискозна течност. Вследствие на полепваемостта по стените и вътрешното триене течността е подложена на деформация, която се разпространява във всички направления от сферата, поради което този вид движение се нарича често деформационно течение.



Фиг. 7.3

Граничен слой. Съвременните представи за движението на реалните флуиди показват, че вследствие на свойството им полепваемост по стените и вътрешното триене винаги в непосредствена близост на обтечените стени съществува тясна област, в която

скоростта на флуидните частици се променя бързо от нула при неподвижната стена до пълната си стойност в течението извън споменатата област. В тази тясна област, наречена *граничен слой* (слой на триене), чиято дебелина намалява с увеличаване на Рейнолдсовото число, се съсредоточава главната част на изменението на скоростта по напречното сечение, докато извън нея, т. е. във вътрешното течение, изменението на скоростта е слабо. Наличието на силно изразен напречен градиент на скоростта довежда до значителни вискозни напрежения в граничния слой, които са най-големи при стената и намаляват с отдалечаването от нея. Извън граничния слой градиентът на скоростта бързо намалява, следователно бързо намаляват и вискозните тангенциални напрежения, поради което външното течение изпитва незначителното влияние на силите от вътрешното триене. Очевидно неговият характер ще се определя предимно от инерционните сили, а също така от налягането и масовите сили, чието действие до известна степен зависи от геометрията на твърдите граници. Това от своя страна дава основание течението във външната област да се разглежда като течение на идеален флуид, т. е. безвихрово (потенциално). Не стои така обаче въпросът с течението в граничния слой, в който силите от вътрешното триене са големи, но съизмерими на тях са и инерционните сили, тъй като в непосредствена близост до стената могат да се развият и големи ускорения. Ето защо при формиране на течението в граничния слой влиянието на вискозните и инерционните сили върху течението е съизмеримо.

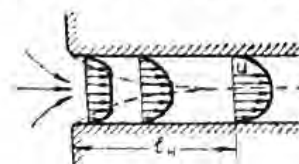
Характерен отличителен признак на граничния слой е едновременно съществуване на две граниещи една с друга области, в които по своята структура течението е различно: *вихрово* в граничния слой и *безвихрово* (потенциално) във външната област, което е толкова по-силно изразено, колкото по-голямо е Рейнолдсовото число. Разбира се, при малките числа на Рейнолдс това разделяне на споменатите области би било невъзможно. Следователно картината на течението, респ. разположението на токовите линии във външното течение, трябва добре да съответствува на картината на потенциалното течение². В случая обаче се наблюдава слабо изместване на токовите линии¹, наложено от забавянето на течението в граничния слой, което е в съответствие с условията на непрекъснатостта (фиг. 7.4).

Течението в граничния слой може да бъде едномерно, двумерно, а при обтичане на тела с произволна форма и тримерно. Освен при обтичане на стени и тела с произволна форма граничен слой се образува и в теченията в тръби и канали. Например при течение на реален флуид между две успоредни стени край тях се развива граничен слой, чиято дебелина нараства по дължина на течението. На известно разстояние от началното сечение, т. е. в края на т. нар. начален участък, двата гранични слоя се

допират един в друг, след което по-нататък се установява равномерно течение, което в зависимост от числото Re има изразен ламинарен или турбулентен характер. Същото може да се каже и за теченията в тръби, където началният участък ще се раз-



Фиг. 7.4



Фиг. 7.5

простре до сечението, в което дебелината на граничния слой ще стане равна на радиуса на тръбопровода (фиг. 7.5).

Необходимо е да се подчертае, че при всички тези случаи за граничен слой може да става дума само в началния участък на течението, след който то става равномерно, стабилизирано ламинарно или турбулентно течение в тръби или канали в зависимост от това дали $Re \leq Re_{кр}$.

Граничният слой играе много важна роля в процесите на динамично (съпротивление, подъемна сила и др.) и термодинамично (топло- и масообмен) въздействие на течението на реалните флуиди с обтечени твърди тела.

Докато ламинарното и турбулентното течение са двата възможни режима на движение на реалните флуиди, пълзящото течение и граничният слой са двата гранични случая на проява на реалността на флуидите, респ. на вискозитета. Обикновено пълзящото течение има място при филтрациите на течности с по-голям вискозитет или при течения с много малка скорост, а граничният слой може да бъде само ламинарен, докато течението в граничния слой може да бъде както ламинарно, така и турбулентно.

Описаните видове течения, с изключение на пълзящото (което намира съществено приложение в земната хидравлика), са обект на по-детайлно изучаване в следващите глави.

7.3. ЛАМИНАРНИ ТЕЧЕНИЯ

При ламинарните течения поради слоестия им характер и малките числа на Рейнолдс влиянието на инерционните сили е пренебрежимо малко в сравнение с преобладаващото влияние на силите от вътрешното триене. Това дава основание за пренебрегване на инерционните сили в Навие-Стоксовите диференциални уравнения за движението на реалните флуиди, което създава значи-