

Проф. инж. ВЕНЦЕСЛАВ Х. МАДЖИРСКИ

МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

ИЗДАТЕЛСТВО „ТЕХНИКА“
СОФИЯ, 1991

представлява допълнителната сила на съпротивление и се нарича *индуктивно съпротивление*.

Несъмнено отклонението на течението и индуктивното съпротивление ще зависят от разпределението на подемната сила по крилото, а също така и от формата му в план. Следователно при обтичане на крилни профили с крайна дължина от реален или идеален флуид в резултат на свободните вихри, стигащи се от крилото, се появява т. нар. индуктивно съпротивление, което не е свързано с вискозитета на флуида, а с наличието на подемната сила.

Вихровата теория, която е много добре разработена, дава възможност да се пресмягат както отклонението на течението, така и индуктивното съпротивление на крила с произволна форма. Например за крила с елиптичен закон за разпределение на циркулацията по разпереността му индуцираната скорост се изразява като

$$V_{my} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y V_0,$$

откъдето за коефициента на индуктивното съпротивление се получава

$$C_{xi} = \frac{C_i}{\frac{\rho V_0^2}{2}} = \frac{C_i}{\frac{\rho V_0^2}{2}} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y^2. \quad (8.65)$$

Ако разпределението на циркулацията по разпереността на крилото се отличава от елиптичния закон, във формулата (8.65) следва да се постави множителят $(1+\Delta)$, при което за правоъгълни крила $\Delta < 0,15$. За крила с елиптично разпределение на циркулацията $\Delta = 0$ и следователно те имат най-малко индуктивно съпротивление. От друга страна, индуктивното съпротивление намалява с увеличаване на относителната разпереност λ . Често за намаляване или намаляване на индуктивното съпротивление в крайнабягване или намаляване на индуктивното съпротивление в крайнабягване на крилата се поставят перпендикулярни плоскости

В реалните флуиди освен индуктивното съпротивление крилата изпитват още съпротивление C_{xp} , което е сумата от съпротивлението на триене и форма ($C_{xp} = C_{xt} + C_{xf}$). Следователно коефициентът на пълно съпротивление на крилата с крайна дължина може да се представи със сумата

$$C_x = C_{xt} + C_{xf} + C_{xi}. \quad (8.66)$$

IX. ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ

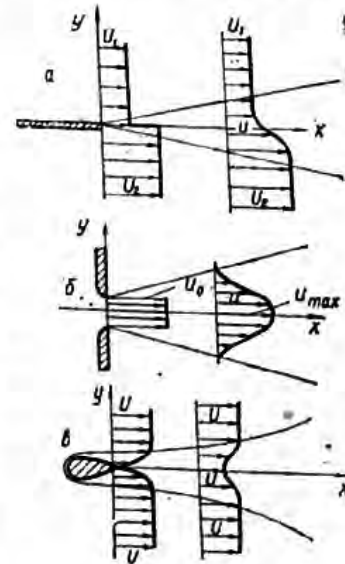
9.1. СВОБОДНА ТУРБУЛЕНТНОСТ

Свободна се нарича турбулентността, която се генерира от напречен градиент на скоростта, създаден в резултат на разликата на скоростите на две или повече течения. Очевидно тя се отнася предимно до онези турбулентни, т. нар. струйни течения, при които липсват обтечени стени и при по-големи Рейнолдсови числа и вискозни напрежения. Характерно за свободната турбулентност е, че тя води началото си от разделителни повърхнини, чието разпадане предизвиква турбулентно размесване между две еднакво насочени течения с различни скорости, едното от които може да има и скорост нула. В резултат на турбулентно-напречно пренасяне на количеството на движение, т. е. примеси, като се формира област, наречена *струен турбулентен граничен слой*, характеризиращ се с непрекъснато разпределение на скоростта, температурата и концентрацията на примеси. При много малки числа на Рейнолдс струйният граничен слой може да бъде ламинарен, но това са много редки случаи, които за техническите задачи имат по-малко значение и не са обект на по-нататъшно разглеждане.

Съществуват различни разновидности на течения със свободна турбулентност, които могат да се подредят в няколко по-характерни случая (Фиг. 9.1).

а. Турбулентно размесване между две течения с еднакво направление, но различна големина на скоростта. То се характеризира с появяване още в началото на съприкосновение на двете течения на разделителна повърхнина, която е неустойчива. Вследствие на турбулентното размесване тази разделителна повърхнина се разрушава бързо, като се образува гранична област с интензивен турбулентен масообмен, чиято ширина нараства по посока на движението.

б). Свободна турбулентна струя, която изтича през отвор в стената или през дюза в еднородна неподвижна флуидна сре-



Фиг. 9.1

да. Вследствие на турбулентността струята се размесва частично с околната флуидна среда, като се получава гранична област, аналогична на предшествувания случай. Очевидно с отдалечаване от изходното сечение дебитът на струята ще нараства, като тя ще се разширява за сметка на намаляването на скоростта ѝ.

в. *Спътна струя*, която се образува зад движещо се в неподвижен флуид тяло или аеродинамична следа след неподвижно тяло, обтечено от флуидно течение. Характерно за този случай е това, че в относителното течение скоростта на спътната струя (следата) е по-малка от тази на заобикалящото я течение, което е съпроводено със съответна импулсна загуба, определяща хидродинамичното съпротивление на тялото. В резултат на турбулентния обмен с външното течение широчината на следата се увеличава с отдалечаване от тялото, като разликата между скоростта на външното течение и тази на следата намалява до окончателното ѝ изчезване, което се наблюдава на голямо разстояние след тялото.

Анализът на свободната турбулентност е сравнително по-лесен от този на пристенната турбулентност. Разбира се, това се дължи на обстоятелството, че вискозните (молекулните) тангенциални напрежения са обикновено пренебрежимо малки в сравнение с турбулентните (молярните) тангенциални напрежения в цялото скоростно поле на течението, докато при пристенната турбулентност трябва да се държи сметка и за вискозните напрежения при стената в ламинарния подслой.

Обикновено свободните турбулентни течения, респ. струйните течения, както и теченията в граничния слой се разглеждат с малка широчина на зоната на размесване в сравнение с тяхната дължина. Приема се, че надлъжният градиент на скоростта е малък в сравнение с напречния. Тези предположения и приемания са направени още от Прандтл с оглед на известни опростявания в уравненията за движение. Следователно за установено двумерно течение на еднороден несвиваем флуид в случай на свободна турбулентност уравненията за движение и непрекъснатостта остават същите, както и уравненията на Прандтл за граничния слой с нулев градиент на налягане, а именно:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_r}{\partial y}, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (9.2)$$

където τ_r означава тангенциалното напрежение, обусловено от турбулентното (привидното) триене. В урavn. (9.1) членът, отчитащ налягането, е пренебрегнат, защото в свободните турбулент-

ни течения може да се приеме в първо приближение, че налягането е постоянно в цялата област на течението.

За да се създаде възможност за интегриране на системата уравнения (9.1) и (9.2), е необходимо да се намери връзката на турбулентните напрежения с величините, които характеризират главното движение. Засега това е възможно с полуемпиричната зависимост

$$\tau_r = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

която е предложена от Прандтл, който приема, че моделът на турбулентното течение е основан на пренасянето на количества на движение. Той използва тази зависимост и при свободната турбулентност, т. е. при турбулентните струйни течения в т. нар. стара теория.

Бусинеск предлага друга разновидност за τ_r :

$$\tau_r = \rho e \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

където

$$e = l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

е коефициент на привидния кинематичен вискозитет, който се приема постоянен по цялата широчина на зоната на размесване и следователно зависи само от надлъжната координата x .

По-късно Прандтл предлага за случая на свободна турбулентност $l \sim \delta$ или $l = \beta \delta$, където β е коефициент на пропорционалност и се определя от опита и $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \alpha \frac{u_{\max}}{\delta}$. Тогава се получава

$$e = \beta^2 \delta^2 \alpha \frac{u_{\max}}{\delta} = \alpha \beta^2 \delta u_{\max} = k \delta u_{\max}$$

и за турбулентно размесване на две течения

$$e = k \delta (u_{\max} - u_{\min})$$

или

$$\tau_r = \rho e \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho k \delta u_{\max} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (9.3 \text{ a})$$

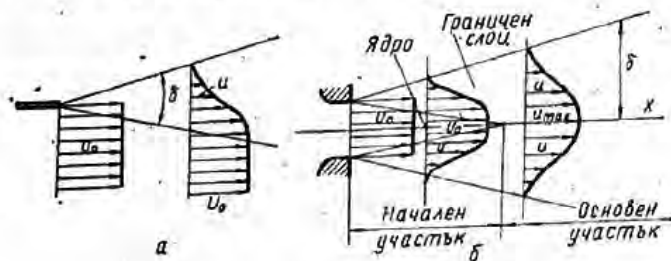
и съответно

$$\tau_r = \rho k \delta (u_{\max} - u_{\min}) \frac{du}{dy}, \quad (9.3 \text{ б})$$

където коефициентът k обединява коефициентите α и β и се определя по опитен път. Полученият израз за τ_r е известен като нова формула на Прандтл за тангенциалните напрежения при свободна турбулентност. Тя има много добро съответствие с опита и довежда до известни удобства при интегрирането на споменатите диференциални уравнения.

9.2. СВОБОДНИ ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ

Свободните турбулентни струи (фиг. 9.2) са сравнително най-добре изученият вид струйни течения. При тях скоростта в изходящото начално сечение има определена големина и разпределение (профил) в зависимост от условията на движението им до това сечение. Разбира се, най-прост е случаят, когато скоростта на струята в началното сечение е постоянна по големина и направление по цялото сечение, т. е. $V_0 = \text{const}$. Непосредствено след изтичане на струята започва интензивен масообмен с околната флуидна среда, който се обуславя от привидните тангенциални напрежения. Вследствие на тези напрежения в движението на флуидни частици на струята са възпрепятствувани в движение или си, а частиците от околната среда се привеждат в движение или ускоряват движението си. За това допринася също така и началната турбулентност на струята. Под действието на напречните пулсации на скоростта флуидните частици от струята увеличават в движение (ежектират) частиците от околната среда. В резултат на това увеличаване и размесване се създава струйният турбулентен



Фиг. 9.2

граничен слой, който непрекъснато надсбелява по дължина на течението. А това от своя страна довежда до увеличаване както на широчината на струята, така и на флуидната маса на струйното течение.

В Непосредствено след изтичането на струята от люзата във вътрешността ѝ се образува т. нар. потенциално ядро, в което скоростта и разпределението ѝ се запазват такива, каквито са били в началното сечение. Всъщност потенциалното ядро е разположено между вътрешните граници на струйния граничен слой. Характерно за него е и това, че широчината му постепенно намалява по дължина на струйното течение и при струя с ограничено тя става равна на нула. Сечението, в което широчината на ядрото става равна на нула, се нарича *преходно сечение*. То разделя струйното течение на два участъка: *начален* — разположен между началното и переходното сечение, и *основен* — разположен след переходното сечение.

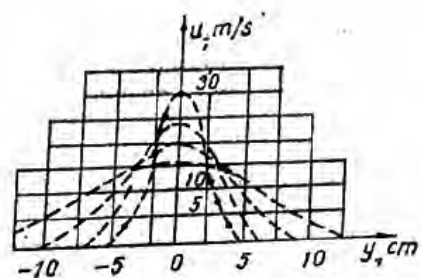
Началният участък е характерен с това, че в него се формира скоростното поле на струйното течение. В него се наблюдава наличие на ядро на постоянни скорости и заобикалящ го струен граничен слой. Докато основният участък представлява само струен граничен слой. Понякога се говори и за *преходен участък*, разположен между началния и основния участък, който има сравнително малка дължина. Тъй като в него се наблюдава също само граничен слой, често той се разглежда заедно с основния участък, особено в последно време.

В основния участък разширението на струйното течение продължава. Независимо от увеличаване на флуидната маса на струята вследствие на турбулентното ѝ размесване с околната среда скоростите в отделните напречни сечения намаляват. Намалява също така и максималната скорост по надлъжната ос x , която, както се вижда по-нататък, е характерен параметър на течението.

Скоростни профили. Както показват теорията и опитът, напречните компоненти на скоростта v и w в отделните сечения на струйното течение са много малки в сравнение с надлъжната ѝ компонента u . Това от своя страна дава основание в инженерното приложение на теорията на турбулентните струи тези компоненти да бъдат пренебрегнати. При това разпределението на скоростта, респ. на компонентата u , в отделните напречни сечения е различно (фиг. 9.3). Очевидно е налице непрекъсната деформация на скоростния профил по дължина на струйното течение, като с отдалечаване от началното сечение скоростният профил все повече се скъсява и разширява. Ако обаче скоростните профили в отделните напречни сечения се построят в безразмерните координати от вида $\frac{u}{u_{\max}} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ или $\frac{u}{u_{\max}} = f\left(\frac{y}{y_c}\right)$

(където y_c е координатата на точката, в която $u = 0.5u_{\max}$), всички скоростни профили в безразмерен вид съвпадат, т. е. остават еднакви. Това показва, че съществува подобие на скоростните профили, респ. на скоростното поле в граничната област

(граничния слой), особено в основния участък на струите с ограничени размери. Казва се още, че съществува афинност на скоростното поле, която придава известен универсален характер на струйното течение независимо от условията в началното сечение.



Фиг. 9.3

Този резултат, получен от многократни опитни изследвания, позволява да се намери и съответен израз за разпределението на скоростта в струйния граничен слой. Така например в теорията и експеримента се използва с успех полуемпиричната зависимост по

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (9.4 \text{ а})$$

или, ако се приеме $\eta = \frac{y}{\delta}$,

$$\frac{u}{u_{\max}} = [1 - \eta^{3/2}]^2. \quad (9.4 \text{ б})$$

Също така много добър резултат се получава, като зависимостта $\frac{u}{u_{\max}} = f(\eta)$ се изрази по [7.19], както следва:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \quad (9.5)$$

или

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 0,75\eta_c^2 + 0,25\eta_c^3, \quad (9.6)$$

където

$$\eta_c = \frac{y}{y_c}.$$



Фиг. 9.4

Познати са и други полуемпирични зависимости, изразени с експоненциални функции или чрез представяне на скоростта в степенен ред въз основа на данни от опита. На фиг. 9.4 е показан безразмерен скоростен профил, определен по уравн. (9.4) и (9.5) — съответните плътни линии, и съпоставен с опита.

Постоянство на количеството на движение. Характерна особеност на свободните турбулентни струи е постоянството на количеството на движение по дължина на струйното течение. Това лесно може да се покаже, ако се излезе от опростеното уравнение на Прандтл за течение в граничния слой (9.1) и уравнението за непрекъснатостта (9.2), които в този вид са приложими за двумерни струйни течения, респ. за течение на плоски турбулентни струи, а именно:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Първото уравнение, интегрирано по y , приема вида

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \rho \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy.$$

Ако в първия член на полученото уравнение се размени редът на диференциране и интегриране, като се вземе под внимание, че $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)$, и вторият член се интегрира по части, получава се

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy + \rho uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \rho \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \tau \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

От друга страна, от уравнението за непрекъснатостта следва

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} u \left(- \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) dy.$$

Тогава предишното уравнение може да се запише във вида

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy + \rho uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \tau \Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

По-нататък, като се съобрази граничното условие при $y \rightarrow \pm \infty$, $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ и $\tau=0$, получава се

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = 0$$

или

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = \text{const.} \quad (9.7)$$

Съгласно с получения израз количеството на движение в струйното течение остава постоянна величина, независеща от координатата x . Очевидно този резултат се дължи на обстоятелството, че статичното налягане по цялото поле на струйно течение е еднакво и равно на това на околната флуидна среда.

В случай на осовосиметрични струи също може да се използва приближителната теория на граничния слой, като сега обаче уравнението на движението (9.1) и непрекъснатостта (9.2) се трансформират в цилиндрични координати. Всъщност те са осовосиметрични аналози на съответните им уравнения за плоска струя. Чрез интегриране на тези уравнения се получава също, че количеството на движение по дължина на струйното течение остава постоянно. Постоянството на количеството на движение т. е.

$$J = \rho \int u^2 df = \text{const.}, \quad (9.8)$$

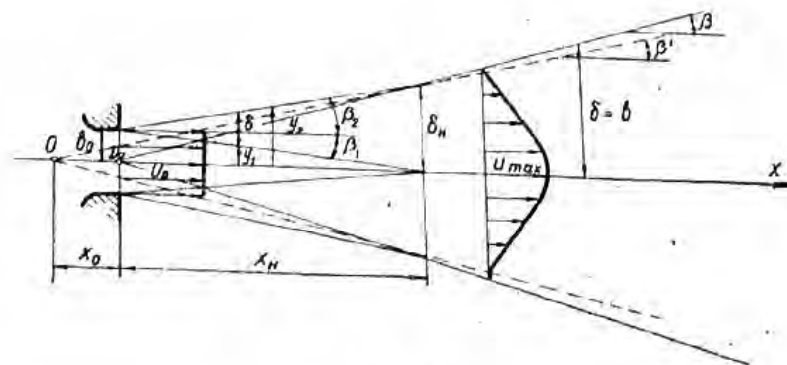
се използва като основно изходно уравнение за определяне на характерните параметри на свободните турбулентни струйни течения.

9.3. СВОБОДНА ПЛОСКА ТУРБУЛЕНТНА СТРУЯ

На фиг. 9.5 е показано схематично разпространението на плоска турбулентна струя, която изтича със скорост u_0 през дълъг процеп с широчина $2b_0$. В началния участък с дължина x_n е разположено потенциално ядро, в което скоростта остава постоянна и равна на $u=u_0$, ограничено от двете страни на струйния граничен слой, където скоростта се изменя от $u=0$ до $u=u_0$. След преходното сечение започва основният участък. В него по

ос x скоростта има максимална стойност $u_{\max} < u_0$, която по дължина на течението намалява, като в отделните напречни сечения скоростта се мени в границите $0 \leq u \leq u_{\max}$.

За плоска турбулентна струя могат да се въведат като ос-



Фиг. 9.5

новни следните параметри: максимална скорост $u_{\max}$, дължина на началния участък x_n , дебелина на граничния слой δ , граници на ядрото и струята — y_1 и y_2 , а също така дебит в началния и основния участък Q_n .

От условието $J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \text{const.}$, приложено за началното сечение и произволно сечение на основния участък, може да се запише равенството

$$\rho u_0^2 2b_0 = 2\rho \int_0^{\delta} u^2 dy$$

или

$$u_0^2 b_0 = \int_0^{\delta} u^2 dy = u_{\max}^2 \delta \int_0^1 \left(\frac{u}{u_{\max}} \right)^2 d \left(\frac{y}{\delta} \right).$$

Тъй като $\eta = y/\delta$ и $\frac{u}{u_{\max}} = f(\eta)$,

следва

$$u_0^2 b_0 = u_{\max}^2 \delta \int_0^1 [f(\eta)]^2 d\eta = u_{\max}^2 \delta A,$$

откъдето

$$u_{\max} = u_0 \sqrt{\frac{1}{A}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = u_0 \frac{\text{const}}{\sqrt{\delta}}$$

или

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \bar{u}_{\max} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\delta}}, \quad (9.9)$$

където

$$\bar{\delta} = \delta / b_0.$$

Въз основа на теоретични изследвания, потвърдени от опита, е установено, че дебелината на струйния граничен слой се изменя по линейния закон

$$\delta \sim x; \quad \delta = ax,$$

където a е коефициент на пропорционалност, чиято числена стойност съгласно с опита е $a=0,27$.

Тогава уравн. (9.9) може да се запише, както следва:

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \frac{\text{const}}{\sqrt{a_0} \sqrt{x}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}. \quad (9.10)$$

Като се вземе под внимание изразът (9.5), т. е.

$$f(\eta) = \frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3,$$

може сравнително лесно да се определи числената стойност на интеграла

$$A = \int_0^1 [f(\eta)]^2 d\eta = 0,37$$

и приемайки $a=0,27$, уравн. (9.10) получава окончателния си вид

$$\frac{u_{\max}}{u_0} = \bar{u}_{\max} = \frac{3,18}{\sqrt{x}}. \quad (9.11)$$

Дължината на началния участък се определя от граничното условие при $x=x_n$ $u_0=u_{\max}$

$$\text{и следователно } \frac{u_{\max}}{u_0} = 1 = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x_n}},$$

откъдето $x_n = 10$

или

$$x_n = 10b_0. \quad (9.12)$$

По отношение на дебелината на струйния граничен слой в преходното сечение може да се запише равенството

$$\delta_n u_{\max}^2 A = u_0^2 b_0,$$

$$\delta_n u_0^2 A = u_0^2 b_0,$$

откъдето

$$\delta_n = \frac{b_0}{A} = \frac{b_0}{0,37} = 2,7b_0; \quad \bar{\delta}_n = 2,7. \quad (9.13)$$

Външната граница на струята в началния участък се дефинира от ъгъл β_2 , за който

$$\text{tg} \beta_2 = \frac{\delta_n - b_0}{x_n} = \frac{2,7b_0 - b_0}{10b_0} = 0,17,$$

откъдето

$$\beta_2 = \text{arc tg } \beta_2 = 9^\circ 40' \approx 10^\circ,$$

а вътрешната граница на струйния граничен слой — от ъгъл β_1 за който

$$\text{tg} \beta_1 = \frac{b_0}{x_n} = 0,1 \text{ и } \beta_1 = 5^\circ.$$

Външната граница на струята в основния участък се определя от ъгъл β' чрез съотношението

$$\text{tg} \beta' = \frac{\delta}{x'} = 0,22,$$

където x' е разстоянието от разглежданото сечение до т. нар. полюс на струята (фиг. 9.5, точка O). Предвид на обстоятелството, че преходът на скоростта към тази на външното течение (в случая тя е равна на нула) е асимптотичен и като се вземе под внимание структурата на турбулентния обмен с околната среда, външната граница може да се дефинира и от ъгъл β , отнесен за точка D , разположена на ос x и началното сечение на струята, за който

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{x} = 0,27 \text{ и } \beta = 15^\circ.$$

Сега може да се определи местоположението на полюса на струята, като се излезе от условието, че двете външни граници се пресичат в точката с координати x_n , δ_n . Следователно при $x = x_n$

$$\delta_n = 0,27x_n = 0,22x'_n,$$

откъдето за разстоянието x_0 се получава

$$x'_n = x_n + x_0 = \frac{0,27}{0,22} x_n,$$

$$x_0 = 0,23 x_n; \quad \frac{x_0}{b_0} = \bar{x}_0 = 2,3.$$

Друг съществен параметър на свободната плоска турбулентна струя е дебитът, чието определяне се извършва сравнително лесно.

За началния участък

$$Q = 2 \left[u_0 y_1 + \int_{y_1}^{\delta} u dy \right] = 2 \left[u_0 y_1 + u_0 \delta \int_0^1 f(\eta) d\eta \right],$$

$$\text{където } \eta = \frac{y - y_1}{\delta}.$$

Като се вземе под внимание изразът $y_1 = b_0 - x \operatorname{tg} \beta_1$, за дебита се получава

$$Q = 2 [u_0 (b_0 - x \operatorname{tg} \beta_1) + u_0 x (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_1) B],$$

където

$$\delta = (b_0 + x \operatorname{tg} \beta_2) - (b_0 - x \operatorname{tg} \beta_1) = x (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_1);$$

$$B = \int_0^1 f(\eta) d\eta; \text{ за } f(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad B = 0,5.$$

По-нататък следва

$$Q = 2u_0 b_0 [1 - \bar{x} \operatorname{tg} \beta_1 + \bar{x} (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_1) B]$$

или

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 (1 - 0,1 \bar{x} + 0,27 \cdot 0,5 \bar{x}) = \\ &= Q_0 (1 + 0,035 \bar{x}), \end{aligned} \quad (9.14a)$$

а в безразмерен вид

$$\frac{Q}{Q_0} = \bar{Q} = 1 + 0,035 \bar{x}, \quad (9.14b)$$

като ежектираният дебит е $Q_e = Q - Q_0$ или

$$\bar{Q}_e = 0,035 \bar{x}. \quad (9.14b)$$

За основния участък следва

$$Q = 2 \int_0^{\delta} u dy = 2u_{\max} \delta \int_0^1 \frac{u}{u_{\max}} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2u_{\max} \delta \int_0^1 f(\eta) d\eta$$

или

$$Q = 2u_0 b_0 \frac{u_{\max}}{u_0} \frac{\delta}{b_0} B,$$

откъдето

$$Q = Q_0 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}} \cdot 0,27 \bar{x} 0,5 \text{ или } \bar{Q} = 0,426 \sqrt{\bar{x}}, \quad (9.15a)$$

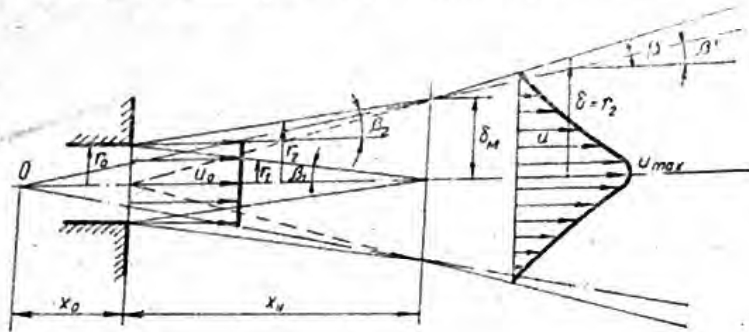
като дебитът на ежектирания флуид е

$$Q_e = Q - Q_0 \text{ или } \bar{Q}_e = 0,426 \sqrt{\bar{x}} - 1. \quad (9.15b)$$

Получените зависимости за характерните параметри на свободна плоска турбулентна струя имат много добро съответствие с опита и могат да се използват успешно в практиката.

9.4. СВОБОДНИ ОСОВОСИМЕТРИЧНИ ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ

Разглежда се свободна осовосиметрична турбулентна струя, която изтича от дюза с цилиндричен отвор в неподвижна еднородна флуидна среда (фиг. 9.6). В този случай също се различа-



Фиг. 9.6

ват два участъка: начален, в който съществува потенциално ядро и струен граничен слой, и основен, състоящ се само от струен граничен слой, в който скоростното поле остава афинно. Следователно и тук може да се използва безразмерната зависимост за скоростта (9.5) и постоянството на количеството на движение (9.8). Сега зависимостта (9.5) може да се представи, както следва:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{\delta}\right)^3, \quad (9.16)$$

където $\eta = \frac{r}{\delta}$, като за началния участък $\delta = r_2 - r_1$, а уравнението за количеството на движение (9.8) е

$$2\pi\rho \int_0^{\delta} u^2 r dr = \text{const.} \quad (9.17)$$

Последното уравнение, приложено за началното и произволно сечение на струята, приема вида

$$\pi\rho u_0^2 r_0^2 = 2\pi\rho \int_0^{\delta} u^2 r dr = \text{const.}$$

където u_0 , r_0 са скоростта и радиусът в началното сечение на струята. По-нататък следва

$$u_0^2 r_0^2 = 2u_{\max}^2 \delta^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_{\max}}\right)^2 \frac{r}{\delta} d\left(\frac{r}{\delta}\right)$$

или

$$u_0^2 r_0^2 = 2u_{\max}^2 \delta^2 \int_0^1 [f(\eta)]^2 \eta d\eta = 2u_{\max}^2 \delta^2 A, \quad (9.18)$$

където

$$A = \int_0^1 [f(\eta)]^2 \eta d\eta.$$

Очевидно за максималната скорост по оста се получава

$$u_{\max}^2 = \frac{u_0^2 r_0^2}{2\delta^2 A} = u_0^2 \frac{1}{2A\delta^2}; \quad \bar{u}_{\max} = \frac{\text{const}}{\delta},$$

където

$$\bar{\delta} = \delta/r_0; \quad \text{const} = \frac{1}{\sqrt{2A}}.$$

Ако се приеме, че $\bar{\delta} = ax$ или $\bar{\delta} = a\bar{x}$, последният израз става

$$u_{\max} = u_0 \frac{1}{\sqrt{2A}} \frac{1}{ax} = u_0 \frac{\text{const}}{x}, \quad (9.19a)$$

където $\text{const} = \frac{1}{a\sqrt{2A}}$. Като се определи числената стойност на интеграла A въз основа на (9.18)

$$A = \int_0^1 [f(\eta)]^2 \eta d\eta = 0,085$$

и се приеме съгласно с опита $a = 0,27$, за константата се получава $\text{const} = 9$ и следователно

$$u_{\max} = u_0 \frac{9}{x}. \quad (9.196)$$

Дължината на началния участък се определя от граничните условия: при $x = x_n$ $u_0 = u_{\max}$, откъдето следва

$$1 = \frac{9}{x_n}; \quad x_n = 9r_0. \quad (9.20)$$

За дебелината на струйния граничен слой в преходното сечение се получава

$$\delta_n = ax_n = 0,27 \cdot 9r_0 = 2,43r_0$$

или

$$\bar{\delta}_n = \frac{\delta_n}{r_0} = 2,43.$$

Получените данни дотук позволяват да се определят границите на ядрото и струята в началния участък, а също така и границата на струята в основния участък.

В началния участък за външната граница, дефинирана с ъгъла β_2 , следва

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\delta_n - r_0}{x_n} = \frac{\bar{\delta}_n - 1}{x_n} = 0,158 \quad \text{или} \quad \beta_2 = 9^\circ.$$

За ядрото (съответно ъгъл β_1) се получава

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{r_0}{x_n} = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{9} = 0,112 \quad \text{или} \quad \beta_1 = 6^\circ 25'.$$

За основния участък (съответно ъгъл β или β'), отнесен за полюса, разположен по оста на дюзата на разстояние x_0 от изходното сечение,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{x} = 0,27,$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\delta}{x'} = 0,22.$$

От условието, че δ_n е еднакво и за двете граници, следва

$$\delta_n = 0,27x_n \quad \text{и} \quad \delta_n = 0,22(x_n + x_0)$$

или

$$0,27x_n = 0,22(x_n + x_0),$$

откъдето

$$x_0 = \frac{(0,27 - 0,22)x_n}{0,22} = 0,23x_n,$$

респ.

$$\bar{x}_0 = \frac{x}{r_0} = 0,23\bar{x}_n = 2,07. \quad (9.21)$$

И тук x_0 е координатата на полюса, която зависи от началната турбулентност на струята. При голяма начална турбулентност x_0 има малки стойности, стремящи се към нула.

За изменението на дебита на струйното течение се използват аналогични на плоска струя решения.

За началния участък

$$Q = \pi r_1^2 u_0 + 2\pi \int_{r_1}^r u r dr = \pi r_1^2 u_0 + 2\pi u_0 x^2 \int_0^1 f(\eta) \eta d\eta$$

или

$$Q = \pi u_0 (r_1^2 + 2x^2 B).$$

Като се приеме

$$r_1 = r_0 - x \operatorname{tg} \beta_1 = r_0 - 0,112x,$$

$$\delta = r_2 - r_1 = r_0 + x \operatorname{tg} \beta_2 - (r_0 - x \operatorname{tg} \beta_1)$$

или

$$\delta = x (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) = 0,27x,$$

$$Q = \pi r_0^2 u_0 [(1 - 0,112\bar{x})^2 + 2B (0,27\bar{x})^2].$$

От безразмерния скоростен профил се получава за

$B = \int_0^1 f(\eta) \eta d\eta = 0,15$, която стойност, заместена в последното уравнение, довежда до израза

$$Q = Q_0 [1 + 0,046 \bar{x} + 0,004 \bar{x}^2]$$

или

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_0} = 1 + 0,046 \bar{x} + 0,004 \bar{x}^2. \quad (9.22)$$

За основния участък

$$Q = 2\pi \int_0^{\delta} u r dr = 2\pi u_{\max} \delta^3 \int_0^1 f(\eta) \eta d\eta,$$

$$Q = 2\pi u_{\max} \delta^3 B = 2\pi u_0 u_{\max} r_0^2 \bar{\delta}^3 B$$

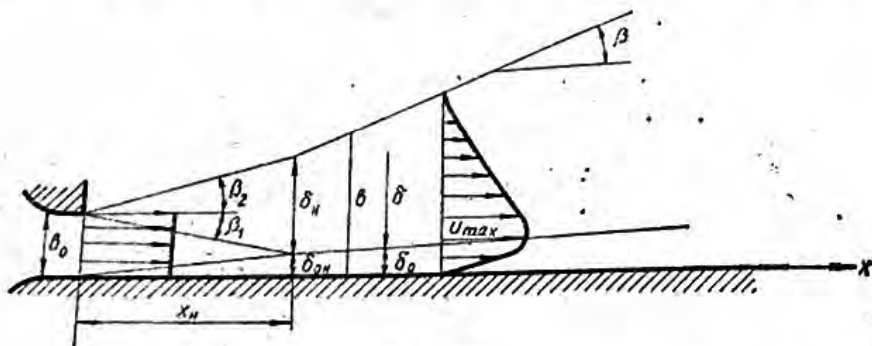
или

$$Q = Q_0 2B \frac{9}{x} (1,27 \bar{x})^2 = 0,2 Q_0 \bar{x}. \quad (9.23)$$

Получените резултати имат добро потвърждение от опита и могат да бъдат използвани в практиката.

9.5. ПОЛУОГРАНИЧЕНА ПЛОСКА ТУРБУЛЕНТНА СТРУЯ

Полуограничената плоска струя (фиг. 9.7) се характеризира с това, че от едната страна тя е ограничена с твърда стена, а от



Фиг. 9.7

другата — с неподвижна флуидна среда. Сечението, в което струйният граничен слой се слива с пристенния слой, се нарича *преходно*. От началното сечение до него се разполага началният участък, в който се намира ядрото на струята. Приема се, че след переходното сечение се намира основният участък на струята. Според приблизителната теория на Прандтл граничния слой

уравненията за движение и непрекъснатостта на плоска полуограничена струя с нулев градиент на налягане имат вида

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

Първото уравнение може да се интегрира по y , както следва:

$$\int_0^b u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^b v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{\rho} \int_0^b \frac{\partial \tau}{\partial y} dy. \quad (9.24)$$

Ако в (9.24) се измени редът на диференциране и интегриране на първия член, като се отбележи, че $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)$, а вторият член се интегрира по части, се получава

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b u^2 dy + uv \Big|_0^b - \int_0^b u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{1}{\rho} \tau \Big|_0^b.$$

Съгласно с уравнението за непрекъснатостта обаче $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, от което следва

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b u^2 dy + uv \Big|_0^b = \tau \Big|_0^b. \quad (9.25)$$

При съобразяване на граничните условия

$$y=0, u=0, uv=0, \tau=\tau_0$$

$$y=b, u=0, uv=0, \tau=0$$

уравн. (9.25) приема вида

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b u^2 dy = -\tau_0$$

или

$$\rho \int_0^b u^2 dy + \tau_0 x = \text{const.} \quad (9.26)$$

Полученият израз показва, че при полуограничените турбулентни струи за разлика от свободните количеството на движение по дължина на течението намалява за сметка на силата от триене по стената.

Константата в (9.26) се определя посредством количеството на движение при изходящото сечение, където $x=0$ и $\tau_0 x=0$, както следва:

$$\rho \int_0^b u^2 dy + \tau_0 x = \rho u_0^2 b_0. \quad (9.27)$$

Съгласно с теорията на граничния слой

$$\tau_0 x = \rho u_{\max}^2 \delta^{**},$$

от което за (9.27) се получава

$$\int_0^b u^2 dy + u_{\max}^2 \delta^{**} = b_0 u_0^2. \quad (9.28)$$

За решаване на (9.28) трябва да се познава зависимостта $u=f(y)$. Приблизително решение може да се получи, ако струйното течение се разглежда съставено от пристенен граничен слой, за който

$$\frac{u}{u_{\max}} = \xi^n,$$

и външен граничен слой, за който по (9.5) следва

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3,$$

където

$$\eta = \frac{y - \delta_0}{\delta} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{y}{\delta_0}.$$

Въз основа на първата зависимост за дебелината на загубите на импулса при приемане $n = \frac{1}{7}$ се получава

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta_0} \frac{u}{u_{\max}} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}}\right) d\left(\frac{y}{\delta_0}\right) = \frac{7}{72} \delta_0.$$

След тези приемания (9.28) се записва във вида

$$\int_0^{\delta_0} u^2 dy + \int_0^{\delta} u^2 dy + \frac{7}{72} \delta_0 u_{\max}^2 = u_0^2 b_0.$$

Първите два интеграла в получения израз могат да се представят съответно

$$\int_0^{\delta_0} u^2 dy = u_{\max}^2 \delta_0 \int_0^1 [f(\xi)]^2 d\xi = u_{\max}^2 \delta_0 A$$

и

$$\int_0^{\delta} u^2 dy = u_{\max}^2 \delta \int_0^1 [f(\eta)]^2 d\eta = u_{\max}^2 \delta B$$

и следователно за споменатия израз се получава

$$u_{\max}^2 \left[A \delta_0 + B \delta + \frac{7}{72} \delta_0 \right] = u_0^2 b_0. \quad (9.29)$$

Като се приеме за $f(\xi)$ съответният израз, в който $n = \frac{1}{7}$, и за $f(\eta)$ — изразът по (9.5), интегралите A и B имат съответните стойности: $A=7/9$ и $B=0,37$. Според опита и някои автори за плоска полуограничена турбулентна струя е в сила отношението $\delta_0=0,1\delta$. Като се приеме също така и зависимостта $\delta=ax$, където a е коефициентът на пропорционалност, уравн. (9.29) приема вида

$$0,458 (\bar{u}_{\max})^2 a \bar{x} = 1,$$

от който следва

$$\bar{u}_{\max} = \frac{u_{\max}}{u_0} = \frac{\text{const.}}{\sqrt{x}}, \quad (9.30a)$$

където

$$\bar{x} = \frac{x}{b_0} \text{ и } \text{const} = \frac{1}{\sqrt{0,458a}}$$

Съгласно с опита $a=0,23$, респ. $\text{const}=3,04$, или

$$\bar{u}_{\max} = \frac{3,04}{\sqrt{x}}. \quad (9.306)$$

Получената формула позволява със задоволителна за инженерната практика точност да се определи големината на максималната скорост по дължина на течението на плоска турбулентна струя, полуограничена от права стена.

От (9.30a) може сравнително лесно да се определи дължината на началния участък от условието при $x=x_n$, $u_{\max}=u_0$, т. е.

$$\bar{x}_n = 9,2. \quad (9.31)$$

За дебелината на пристенния и струйния граничен слой в предходното сечение ($x=x_n$) се получава съответно

$$\bar{\delta}_n = 0,23\bar{x}_n, \quad (9.32a)$$

$$\bar{\delta}_{0n} \approx 2,1. \quad (9.32b)$$

Други съществени параметри са границите на ядрото и външната граница на струята. За тях се получават следните зависимости:

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{b_0 - \delta_{0n}}{x_n} = \frac{1 - \delta_{0n}}{x_n} = 0,086,$$

откъдето

$$\beta_1 = \text{arc tg } 0,086,$$

$$\text{tg } \beta_2 = \frac{\delta_n - \delta_0}{x_n} = \frac{1,1\bar{\delta}_n - 1}{x_n} = 0,144$$

и

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \beta_1 + \text{tg } \beta_2 = 0,23 = \text{const}$$

за началния и основния участък.

За нарастването на дебита в основния участък се получава

$$Q = \int_0^{\delta_0} u dy + \int_0^{\delta} u dy = u_{\max} \left[\bar{\delta}_0 \int_0^1 f(\xi) d\xi + \bar{\delta} \int_0^1 f(\eta) d\eta \right], \quad (9.33)$$

$$Q = u_{\max} \bar{\delta} (0,1C + D),$$

където

$$C = \int_0^1 f(\xi) d\xi \text{ и } D = \int_0^1 f(\eta) d\eta.$$

Същите интеграли съобразно със зависимостите за $f(\xi)$ и $f(\eta)$ имат числени стойности съответно $C=0,87$ и $D=0,5$, откъдето за дебита се получава

$$Q = Q_0 \bar{u}_{\max} \bar{\delta} 0,587$$

или

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_0} = 0,587 \bar{u}_{\max} \bar{\delta} = 0,414 \sqrt{x}. \quad (9.34)$$

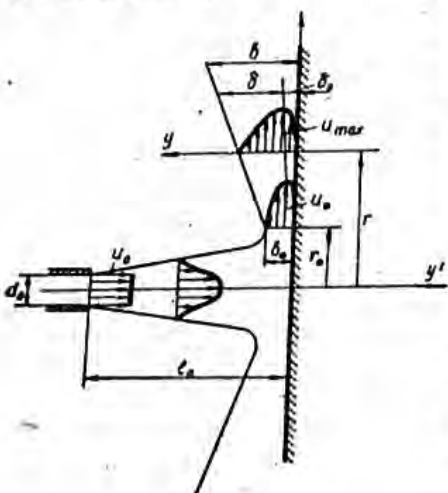
Получените резултати за основните параметри на плоската турбулентна струя, полуограничена от права стена, имат много добро съответствие с опита и могат да бъдат успешно използвани в инженерната практика.

9.6. РАДИАЛНА ПРИСТЕННА ТУРБУЛЕНТНА СТРУЯ

Течението на струя срещу екран (фиг. 9.8) се характеризира с наличие на два участъка: първи до екрана, в който течението запазва характера на свободна осовосиметрична струя, и втори, в който течението се разпространява като полуограничена плоска радиална турбулентна струя. Очевидно между тези два участъка съществува и преходен участък, в който се наблюдава деформация на скоростното поле и преминаване на струйното течение от осова в радиална посока. При това във втория участък се различават две гранични области, разделени от повърхнината на максималните скорости: пристенна — обхващаща граничния слой, и външна, в която течението се подчинява на закона на движение на свободна плоска радиална турбулентна струя. Тези характерни особености правят задачата сложна, поради което този вид

струйни течения все още не са достатъчно изучени и засега са познати предимно полуемпирични решения.

Опитът показва, че в първия участък скоростното поле запазва характера на осовосиметрична турбулентна струя на разстояние $y' = 0,8b_0$ независимо от наличието на екрана. За разлика от него значително по-сложна е картината на течението във втория участък. За начално сечение на втория участък може да се приеме сечението с най-малка дебелина, от което нататък течението има напълно изразен характер на полуограничена радиална турбулентна струя. Ето защо неговата координата r_* , дебелината на струята δ_* и максималната скорост u_* в това сечение са характерни начални параметри. Те са определени по експериментален път и са показани на фиг. 9.9 в зависимост от местоположението на екрана спрямо дюзата, от която изтича струята.



Фиг. 9.8

Разпределението на скоростта в напречните сечения на граничния слой, получено от опита, показва много добро съответствие със степения закон (7.996), валиден за течението в граничния слой:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^n,$$

докато за външната гранична област е в сила зависимостта (9.5) респ. (9.6):

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3,$$

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - 0,75\eta_c^2 + 0,25\eta_c^3,$$

където

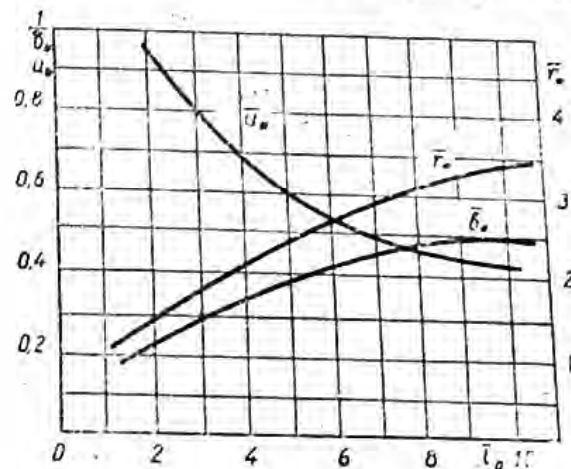
$$\eta = \frac{y - \delta_0}{\delta_1} \text{ и } \eta_c = \frac{y - \delta_0}{y_* - \delta_0}.$$

Що се отнася до изменението на максималната скорост по дължината на течението, то е подчинено на закона

$$u_{\max} = \frac{k}{r} = \text{const}, \quad (9.35)$$

където k е константа, която съгласно с резултатите от опита се изменя в границите $k = 1,35 \div 1,4$.

Дебелината на граничния слой δ_0 е характерен параметър на



Фиг. 9.9

полуограничената радиална струя. Тя може да се определи сравнително лесно и с достатъчна за инженерната практика точност с помощта на импулсното уравнение на турбулентния граничен слой, което в случая приема вида

$$\frac{d\delta_0^{**}}{dr} = \frac{\tau_0}{\rho u_{\max}^2} = 0,0225 \left(\frac{u_{\max} \delta_0}{\nu}\right)^{-1/4}.$$

Като се използва зависимостта (7.996) при $n = 1/7$, за δ_0^{**} се получава

$$\delta_0^{**} = \delta_0 \int_0^1 \frac{u}{u_{\max}} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}}\right) d\left(\frac{y}{\delta_0}\right) = 7/72 \delta_0.$$

в резултат на което за импулсното уравнение следва изразът

$$\frac{d\delta_0^{**}}{dr} = \frac{7}{72} \frac{d\delta_0}{dr} = 0,0225 \left(\frac{u_{\max} \delta_0}{\nu}\right)^{-1/4}.$$

Ако се приведе в безразмерен вид посредством съответно разделяне на u_0 и d_0 и за отношението $\frac{u_{\max}}{u_0}$ се приеме зависимостта по (9.35), в която $k=1,38$, импулсното уравнение след съответни преобразувания и интегриране се довежда до зависимостта

$$\bar{\delta}_0 = 0,38 \text{Re}^{-1/5} \bar{r}, \quad (9.36)$$

където

$$\bar{r} = \frac{r}{d_0}, \quad \bar{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{d_0} \quad \text{и} \quad \text{Re} = \frac{u_{\max} r}{\nu}.$$

Съгласно с опита параметърът l_0 не оказва забележимо влияние, когато $\bar{l}_0 < 10$.

За определяне на дебелината на външната гранична област на струйното течение се използва получената от опита зависимост $\delta = 6\delta_0$ и следователно

$$\bar{\delta} = 2,28 \text{Re}^{-1/5} \bar{r}. \quad (9.37)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович, Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., Наука, 1976.
2. Абрамович, Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
3. Абрамович, Г. Н. и коллегия. Теория турбулентных струй. М., Наука, 1984.
4. Альтшуль, А. Д., П. Г. Киселев. Гидравлика и аэродинамика. М., Стройиздат, 1975.
5. Аржаников, Н. С., В. Н. Мальцев. Аэродинамика. М. Оборонгиз, 1956.
6. Байбаралин, Ю. В. Основы лазерной техники. Киев. Издательское объединение Вища школа, 1988.
7. Гиневский, А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., Машиностроение, 1969.
8. Голубева, О. В. Курс механики сплошных сред. М., Высшая школа, 1972.
9. Дейли, Дж., Д. Харлеман. Механика жидкости (прев. от англ.) М., Энергия, 1971.
10. Дейли, Дж. Техническая газодинамика. М., Энергия, 1974.
11. Дейли, М. Е., Х. Е. Зарякин. Газодинамика. М., Энергоатомиздат, 1984.
12. Козлов, Т. Ф. Теоретические исследования пограничного слоя. Киев, Наукова думка, 1982.
13. Кочин, Н. А., И. А. Кибель, Н. В. Розг. Теоретическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1963.
14. Краснов, Н. Ф. Аэродинамика. М., Высшая школа, 1976.
15. Ламб, Г. Гидродинамика (прев. от англ.) М., Издательство технико-теоретической литературы, 1974.
16. Лебедев, Н. В., С. Л. Трескунов, В. С. Яковенко. Элементы струйной авиации. М., Машиностроение, 1973.
17. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1987.
18. Лойцянский, Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1963.
19. Маджирски, В. Опр деление разпределението на скоростта по напречното сечение при размесване на две осесиметрични струи с ограничени размери. С., Техника, 1969.
20. Маджирски, В., Е. Чичов. Сборник задачи по хидродинамика и хидравлика. С., Наука и изкуство, 1958.
21. Маджирски, В., П. Станков, И. Антонов. Исследование радиальной пристеночной турбулентной струи. Будапешта, Яблони, 1974.
22. Мартынов, А. К. Экспериментальная аэродинамика. М., Оборонгиз, 1950.
23. Монин, А. С., А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1965.
24. Мостков, М. А. Прикладная гидромеханика. М., Госэнергоиздат, 1963.
25. Михталян, А. М. Аэродинамика. М., Машиностроение, 1970.
26. Повх, И. Л. Техническая гидромеханика. Л., Машиностроение, 1976.
27. Попов, М. Г. Хидродинамика. С., Техника, 1973.
28. Попов, М. Г., Л. Я. Панов. Хидро и газодинамика. С., Техника, 1980.
29. Прандтль. Гидромеханика (прев. от немски). ИЛ М., 1949.
30. Реди, Дос. Промышленные применения лагеров. М., Мир, 1981.
31. Седов, Л. И. Механика сплошной среды. М., Наука, 1970.
32. Торг, С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Издательство технико-теоретической литературы, 1951.
33. Шерстюк, А. Н. Турбулентный пограничный слой. Энергия. М., 1974.
34. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя (прев. от немски). М., Физматгиз, 1972.